Osittaisdifferentiaaliyhtälöt (Kevät 2012)
Harjoitus 1
Ratkaisuja (Jussi Martin)

1. Ovatko seuraavat ODY:t lineaarisia, semi– tai kvasilineaarisia ($u = u(x, y)$):

a) $u_x + \sin x\; u_y = e^{xyu^2}$, **b)** $\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin(x+y)$,

c) $\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{1}{u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin(x+y)$, **d)** $u_y + u_x u_{yy} = \sin(x+y)$

Ratkaisu:
Yhtälö **a)** on semilineaarinen, yhtälö **b)** on lineaarinen, yhtälö **c)** on kvasilineaarinen ja yhtälö **d)** on kvasilineaarinen; mitkä nähdään määritelmistä.

Lineaarisilla yhtälöillä riippuvuus u:sta ja sen osittaisderivaatoista on lineaarista siten, että termien kertoimet eivät riipu u:sta tai sen osittaisderivaatoista.

Semilineaarisilla yhtälöillä riippuvuus u:n osittaisderivaatoista on lineaarista siten, että termien kertoimet eivät riipu u:sta tai sen osittaisderivaatoista.

Kvasilineaarisilla yhtälöillä riippuvuus yhtälössä esiintyvien u:n korkeimman asteen osittaisderivaatoista on lineaarista siten, että termien kertoimet saavat riippua u:n muuttujista, funktiosta u, sekä u:n alempiasteisista osittaisderivaatoista.

Tehtävät 2.-5. Ratkaise seuraavat ODY:iden alkuarvotehtävät ja tutki, millä muuttujien arvoilla ratkaisut ovat olemassa:

2. $u_x + yu_y = x, \quad u(0, y) = y^2$,

Ratkaisu:
Karakteristiset yhtälöt ovat

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = y, \quad \frac{dz}{dt} = x$$

ja alkuehtoina on

$$x(s, 0) = 0, \quad y(s, 0) = s, \quad z(s, 0) = s^2;$$

joten näitä käyttämällä saadaan, että

$$x(s, t) = t, \quad y(s, t) = se^t, \quad z(s, t) = \frac{t}{2}^2 + s^2.$$

Muuttujan vaihto $(s, t) \mapsto (x, y)$ on hyvin määritelty, sillä

$$\det \begin{pmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^t \\ 1 & se^t \end{vmatrix} = -e^t \neq 0, \quad \text{kaikilla} \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2$$

ja kääntyvyys nähdään siitä, että kuvaus on myös selvästi injektiivinen.

Nyt siis

$$t = x, \quad s = \frac{y}{e^t} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{y}{e^x},$$

ja koska $z(s, t) = \frac{t}{2}^2 + s^2$ saadaan siis ratkaisuksi

$$u(x, y) = \frac{x}{2}^2 + (\frac{y}{e^x})^2,$$

joka on määritelty kaikkialla $\mathbb{R}^2$:ssa.

3. $-4u_x + u_y = u, \quad u(x,0) = x,$

Ratkaisu:
Karakteristiset yhtälöt ovat

$$\frac{dx}{dt} = -4, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = z$$

ja alkuehtoina on

$$x(s,0) = s, \quad y(s,0) = 0, \quad z(s,0) = s;$$

joten

$$x(s,t) = -4t + s, \quad y(s,t) = t, \quad z(s,t) = se^t.$$

Muuttujan vaihto $(s,t) \mapsto (x,y)$ on hyvin määritelty, sillä

$$\det\begin{pmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \quad \text{kaikilla} \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

ja kuvaus $(s,t) \mapsto (x,y)$ on kääntyvä, koska se on myös injektio.

Nyt

$$t = y, \quad s = x + 4t = x + 4y$$

ja koska $z(s,t) = se^t$ saadaan siis ratkaisuksi

$$u(x,y) = (x+4y)e^y,$$

mikä on määritelty kaikkialla $\mathbb{R}^2$:ssa.

4. $u_x + \frac{1}{x}u_y = u^2, \quad u(1,y) = y^2$,

Ratkaisu:
Yhtälö on singulaarinen pisteissä joissa $x = 0$, joten karakteristisia käyriä käyttämällä ratkaisu löydetään vain puolitasosta $x > 0$ (tämä on siis se alue, jossa alkuehtokäyrä sijaitsee).

Karakteristiset yhtälöt ovat

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}, \quad \frac{dz}{dt} = z^2$$

ja alkuehtoina on

$$x(s,0) = 1, \quad y(s,0) = s, \quad z(s,0) = s^2.$$

Näistä on helpointa ratkaista ensin x, sitten sen avulla y ja lopuksi z. Näin saadaan:

$$\begin{aligned} x(s,t) &= 1 + t, \\ y(s,t) &= \ln|1+t| + c_1(s) \overset{\text{alkuehto}}{=} \ln|1+t| + s, \\ z(s,t) &= -\frac{1}{t + c_2(s)} \overset{\text{alkuehto}}{=} -\frac{1}{t - 1/s^2}. \end{aligned}$$

Huomataan, että y:n parametrisointi ei ole yksikäsitteinen. Tarkastelu on siis rajoitettava joukkoon $t > -1$ eli puolitasoon $x > 0$.

(Tämä toki seurasi jo muutenkin siitä, että yhtälöllä on singulariteetti joukossa $y = 0$.)

Muuttujan vaihto $(s,t) \mapsto (x,y)$ on nyt hyvin määritelty, sillä

$$\det\begin{pmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1/(1+t) \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \quad \text{kaikilla} \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2, \ t > -1$$

ja kuvaus $(s,t) \mapsto (x,y)$ on kääntyvä, koska se on myös injektio.

Nyt siis

$$1 + t = x \quad \Rightarrow \quad t = x - 1$$

$$y = \ln(1+t) + s = \ln x + s \quad \Rightarrow \quad s = y - \ln x$$

ja koska

$$z(s,t) = -\frac{1}{t - 1/s^2},$$

on

$$u(x,y) = -\frac{1}{x - 1 - \frac{1}{(y-\ln x)^2}} = \frac{(y-\ln x)^2}{(y-\ln x)^2(1-x)+1}.$$

Tämä ratkaisu on määritelty vain niillä arvoilla (x,y), joilla

$$(y-\ln x)^2(1-x)+1 \neq 0.$$

Ratkaisu ei ole siis määritelty käyrillä

$$y = \sqrt{\frac{1}{x-1}} + \ln x \qquad \text{ja} \qquad y = -\sqrt{\frac{1}{x-1}} + \ln x.$$

Nämä käyrät jakavat puolitason $x > 0$ kolmeen alueeseen ja ratkaisu $u(x,y)$ on yksikäsitteisesti määritelty niistä sillä, joka sisältää alkuehtokäyrän $\gamma_{\text{alk}}(s) = (1, s, s^2)$ projektion xy-tasoon eli käyrän $\gamma(s) = (1, s)$.

Toisin sanoen, ratkaisun määrittelyjoukko on käyrien

$$x = 0, \quad y = \sqrt{\frac{1}{x-1}} + \ln x \quad \text{ja} \quad y = -\sqrt{\frac{1}{x-1}} + \ln x$$

väliin jäävä alue.

5. $xu_x + u_y + zu_z = u, \quad u(x,0,z) = h(x,z).$

Ratkaisu:
Tässä käytetään merkintää w funktion u arvoille parametrien (s_1, s_2, t) suhteen, koska muuttuja z on jo käytössä.

Karakteristiset yhtälöt ovat

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = z, \quad \frac{dw}{dt} = w$$

ja alkuehtoina on

$$x(s_1,s_2) = s_1, \quad y(s_1,s_2) = 0, \quad z(s_1,s_2) = s_2, \quad w(s_1,s_2) = h(s_1,s_2).$$

Näistä saadaan, että

$$\begin{aligned} x(s_1,s_2,t) &= s_1 e^t, \\ y(s_1,s_2,t) &= t, \\ z(s_1,s_2,t) &= s_2 e^t, \\ w(s_1,s_2,t) &= h(s_1,s_2)e^t. \end{aligned}$$

Muuttujan vaihto $(s_1,s_2,t) \mapsto (x,y,z)$ on hyvin määritelty, sillä

$$\det \begin{pmatrix} x_{s_1} & y_{s_1} & z_{s_1} \\ x_{s_2} & y_{s_2} & z_{s_2} \\ x_t & y_t & z_t \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \\ s_1 e^t & 1 & s_2 e^t \end{vmatrix} = -e^{2t} \neq 0, \quad \text{kaikilla} \quad (s_1,s_2,t) \in \mathbb{R}^3$$

ja kuvaus $(s_1,s_2,t) \mapsto (x,y,z)$ on kääntyvä, koska se on myös injektio.

Nyt

$$t = y \quad \Rightarrow \quad s_1 = xe^{-t} = xe^{-y}, \quad s_2 = ze^{-t} = ze^{-y}$$

ja koska $w(s_1,s_2) = h(s_1,s_2)e^t$, on

$$u(x,y,z) = h(xe^{-y}, ze^{-y})e^y,$$

mikä on määritelty kaikkialla $\mathbb{R}^3$:ssa.