OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 9
KEVÄT 2012

1. Laske

$$\int_\gamma \partial_{\nu(\bar{y})} \log \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|} d\sigma(\bar{y}),$$

kun $\rho > 0$, $\gamma = \partial B(\bar{x}, \rho)$ ja integraali on kaarenpituuden suhteen.

2. Olettaen, että $u = u(\bar{x})$, $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, on harmoninen, osoita, että sen Kelvin-inversio,

$$v(\bar{x}) = \frac{1}{|\bar{x}|^{n-2}} u\Big(\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|^2}\Big)$$

on myös määrittelyalueessaan harmoninen.

3. Olkoon G yksikkökiekon Greenin funktio,

$$G(\bar{x}, \bar{y}) = \log\Big(\frac{1}{r}\frac{|\bar{x} - r^2\bar{y}|}{|\bar{x}-\bar{y}|}\Big),$$

$r = |\bar{x}|$. Laske tämän normaaliderivaatta kiekon reunalla, $\partial_{\nu(\bar{y})} G(\bar{x}, \bar{y})$ ja vertaa tulosta Poisson'n ytimen lausekkeeseen.

4.–5. Olkoon $u = u(\bar{x})$, $\bar{x} \in \Omega$, harmoninen funktio rajoitetussa tasoalueessa Ω sekä $u \in C(\bar{\Omega})$. Osoita, että jos $\bar{x} \in \Omega$, niin

$$|\nabla u(\bar{x})| \leq \frac{C}{d},$$

missä d on $\bar{x}$:n etäisyys Ω:n reunasta $\partial\Omega$ ja $C > 0$ on jokin $\bar{x}$:stä riippumaton vakio.
Neuvo. Osoita keskiarvolauseen avulla, että pätee

$$u(\bar{x}) = \frac{1}{\pi\varrho^2} \int_{B(\bar{x},\varrho)} u(\bar{y}) d\bar{y}$$

sopivilla $\varrho > 0$ ja sovella tätä kaavaa u:n osittaisderivaattoihin, jotka ovat harmonisia funktioita.

****

1. Calculate

$$\int_\gamma \partial_{\nu(\bar{y})} \log \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|} d\sigma(\bar{y}),$$

when $\rho > 0$, $\gamma = \partial B(\bar{x}, \rho)$ and integration is with respect to the arc length.

2. Assuming that $u = u(\bar{x})$, $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, is harmonic, show that its Kelvin-inversion,

$$v(\bar{x}) = \frac{1}{|\bar{x}|^{n-2}} u\Big(\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|^2}\Big)$$

is also harmonic wherever defined.

3. Let G be the Green function of the unit disc,

$$G(\bar{x}, \bar{y}) = \log\Big(\frac{1}{r}\frac{|\bar{x} - r^2\bar{y}|}{|\bar{x} - \bar{y}|}\Big),$$

with $r = |\bar{x}|$. Calculate its normal derivative on the boundary of the disc, $\partial_{\nu(\bar{y})} G(\bar{x}, \bar{y})$ and compare the result with the Poisson kernel.

4.–5. Let $u = u(\bar{x})$, $\bar{x} \in \Omega$ be a harmonic function in the bounded planar domain Ω and $u \in C(\bar{\Omega})$. Prove that if $\bar{x} \in \Omega$, then

$$|\nabla u(\bar{x})| \leq \frac{C}{d},$$

where d is the distance of $\bar{x}$ from the boundary $\partial\Omega$ of Ω and $C > 0$ is a constant independent of $\bar{x}$.
Hint. Use the mean value theorem to show that

$$u(\bar{x}) = \frac{1}{\pi \varrho^2} \int\limits_{B(\bar{x}, \varrho)} u(\bar{y}) d\bar{y}$$

for suitable $\varrho > 0$ and apply this to the partial derivatives of u, which are harmonic functions.