OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 8
KEVÄT 2012

1. Osoita käyttäen määritelmää, että kiintellä $\bar{y} \in \mathbf{R}^2$ funktio $\log(1/|\bar{x} - \bar{y}|)$ on reaalianalyyttinen $\bar{x} \in \mathbf{R}^2$:n funktio alueessa, jossa $\bar{x} \neq \bar{y}$.

2. Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ rajoitettu yhdesti yhtenäinen alue, $\partial\Omega \in C^2$. Oletetaan, että on annettu funktio $q \in C^1(\bar{\Omega})$, jolle $q(\bar{x}) < 0$ kaikilla $\bar{x} \in \bar{\Omega}$. Tarkastellaan Neumannin probleemaa

$$\Delta u(\bar{x}) + q(\bar{x})u(\bar{x}) = 0, \qquad \text{kun } x \in \Omega,$$

$$\partial_\nu u = f, \qquad \text{joukossa } \partial\Omega.$$

Olettaen, että tällä on olemassa ratkaisu $u \in C^2(\bar{\Omega})$, osoita, että ratkaisu on yksikäsitteinen. (Green.)

3. Todista luentojen kaava (8.28),

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 - 2\varrho r \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi.$$

4.–5. Tarkastellaan ns. Poissonin kaavaa ylemmässä puolitasossa, ja sen määrittelemää funktiota

$$u(x, y) := \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi,$$

missä $x \in \mathbf{R}$, $y > 0$.
Olettaen aluksi, että f on joukossa $\mathbf{R}$ jatkuva lukuunottamatta äärellistä määrää epäjatkuvuuspisteitä ja että $|f(x)| \leq (1+|x|)^{-3}$ kaikilla x, osoita, että u on harmoninen ylemmässä puolitasossa.
Tarkastellaan tapausta, että f on jonkin suljetun välin $[a, b] \subset \mathbf{R}$ karakteristinen funktio: $f(x) = 1$, jos $x \in [a, b]$, ja $f(x) = 0$ muulloin.
Osoita, että tällöin

$$\lim_{y \to 0} u(x, y) = f(x)$$

lukuunottamatta mahdollisesti välin $[a, b]$ päätepisteitä.

****

1. Using the definition of (real) analyticity, show that for any fixed $\bar{y} \in \mathbf{R}^2$ the function $\log(1/|\bar{x} - \bar{y}|)$ is a real analytic function of $\bar{x} \in \mathbf{R}^2$ in the domain where $\bar{x} \neq \bar{y}$.

2. Let $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ be a bounded simply connected domain with $\partial\Omega \in C^2$. Assume that we are given a function $q \in C^1(\bar{\Omega})$, such that $q(\bar{x}) < 0$ for all $\bar{x} \in \bar{\Omega}$. Consider the Neumann problem

$$\begin{aligned} \Delta u(\bar{x}) + q(\bar{x})u(\bar{x}) &= 0, && \text{kun } x \in \Omega, \\ \partial_\nu u &= f, && \text{joukossa } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Assuming the a solution $u \in C^2(\bar{\Omega})$ exists, show that it is unique. (Green.)

3. Prove the formula (8.28) of the lecture note, i.e.,

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 - 2\varrho r \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi.$$

4.–5. Let us consider the Poisson formula of the upper half plane and the function defined by it,

$$u(x, y) := \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi,$$

where $x \in \mathbf{R}$, $y > 0$.

Let us first assume that f is continuous in $\mathbf{R}$ except possibly for a finite number of discontinuity points and that $|f(x)| \leq (1 + |x|)^{-3}$ for all x. Show then that u is harmonic in the upper half plane.

Assume then that f is the characteristic function of an interval $[a, b] \subset \mathbf{R}$: $f(x) = 1$, if $x \in [a, b]$, and $f(x) = 0$ otherwise.

Show that then

$$\lim_{y \to 0} u(x, y) = f(x)$$

except possibly for the end points of the interval $[a, b]$.