OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 7
KEVÄT 2012

1. Osoita laskulla, että kiintellä $\bar{y} \in \mathbf{R}^2$ funktiot $-\log|\bar{x}-\bar{y}|$ (kun $\bar{x} \in \mathbf{R}^2$) ja $|\bar{x}-\bar{y}|^{2-n}$ (kun $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$) ovat harmonisia alueessa, jossa $\bar{x} \neq \bar{y}$. (Avaruuden $\mathbf{R}^n$ alueessa määritelty funktio u on harmoninen, jos $\Delta u = 0$.)

2. Ovatko seuraavat funktiot harmonisia tasossa tai sen jossakin osa–aluessa ($(x, y) \in \mathbf{R}^2$):

a) $e^{x^2-y^2}$,

b) $\sin(5x)e^{5y}$,

c) $x/(x^2-y^2)$,

d) x^{10} ?

3.-4. Osoita, että jos u toteuttaa monisteen integraaliyhtälön (7.8) eli

$$u(\bar{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-(\bar{x}-\bar{y})^2/(4t)} \phi(\bar{y}) d\bar{y}$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-(\bar{x}-\bar{y})^2/(4(t-s))} u(\bar{y}, s)^2 d\bar{y} ds \tag{1}$$

niin se toteuttaa semilineaarisen lämpöyhtälön (PAREL)-(ALKEL), luennot, sivu 39. Riittää esittää todistuksen pääkohdat, voi derivoida integraalimerkin alla ilman perusteluja.

5. Jatkoa edelliselle. Jos yhtälössä (PAREL) lauseke u^2 korvataan esim. lausekkeella u^5 tai $u^3/(1+u^2)$, millainen on vastaava integraaliyhtälö (1) ?

****

1. Prove that for a fixed $\bar{y} \in \mathbf{R}^2$ the functions $-\log|\bar{x}-\bar{y}|$ (when $\bar{x} \in \mathbf{R}^2$) and $|\bar{x}-\bar{y}|^{2-n}$ (when $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$) are harmonic in the domain $\bar{x} \neq \bar{y}$. (A function u is harmonic in a domain of $\mathbf{R}^n$, if $\Delta u = 0$.)

2. Are the following functions harmonic in some subset of the plane ($(x, y) \in \mathbf{R}^2$):

a) $e^{x^2-y^2}$,

b) $\sin(5x)e^{5y}$,

c) $x/(x^2-y^2)$,

d) x^{10} ?

3.-4. Show that, if u satisfies the integral equation (7.8) of the lecture notes, i.e.,

$$u(\bar{x},t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-(\bar{x}-\bar{y})^2/(4t)} \phi(\bar{y}) d\bar{y}$$

$$+ \int\limits_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-(\bar{x}-\bar{y})^2/(4(t-s))} u(\bar{y},s)^2 d\bar{y} ds \tag{1}$$

then it also satisfies the problem (PAREL)-(ALKEL), p. 39 of the (Finnish) lecture notes. It is enough to outline the proof, and you can differentiate under the integral sign without hesitating!

5. Continuation of the previous problem. If u^2 is replaced in (PAREL) by for example u^5 or $u^3/(1+u^2)$, how should the corresponding integral equation (1) read as?