OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 5
KEVÄT 2012

1. Ratkaise Fourier-sarjamenetelmällä seuraava aaltoyhtälöä koskeva probleema välillä $I := [0, 2] \subset \mathbf{R}$:

$$u_{tt} = u_{xx} \quad , \quad x \in I \ , t > 0,$$

$$u(0, t) = u(2, t) = 0 \quad , \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \sin(3\pi x) \quad , \quad x \in I,$$

$$u_t(x, 0) = 0 \quad , \quad x \in I.$$

Laske ratkaisun $u$ energiafunktionaalin arvo ja totea, että se on vakio (ajan suhteen).

2. Merkitään $\bar{x} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ ja $u = u(\bar{x}, t) = u(x, y, z, t)$. Tarkastellaan seuraavaa aaltoyhtälön Cauchyn probleema $\mathbf{R}^3$:ssa:

$$u_{tt} = \Delta u \quad , \quad \bar{x} \in \mathbf{R}^3 \ , \ t > 0,$$

$$u(\bar{x}, 0) = 0 \quad , \quad \bar{x} \in \mathbf{R}^3,$$

$$u_t(\bar{x}, 0) = \phi(\bar{x}) \quad , \quad \bar{x} \in \mathbf{R}^3.$$

Laske ratkaisukaavasta funktion $u$ arvo pisteessä $\bar{x} = 0$ ajanhetkellä $t$, kun $\phi(\bar{x}) = 4 - |\bar{x}|^2$, jos $|\bar{x}| \le 2$, ja $\phi(\bar{x}) = 0$, jos $|\bar{x}| > 2$ (itseisarvo = vektorin pituus).

3. Oletetaan, että funktio $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva (vähempikin riittäisi). Johda derivaatan määritelmästä derivointikaava

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(t, s) ds = f(t, t) + \int_0^t \frac{\partial f(t, s)}{\partial t} ds$$

4. Miten derivoit:

$$\frac{d}{dt} \int_{-t}^0 f(t, s) ds$$

ja

$$\frac{d}{dt} \int_t^{3t + t^3} f(t, s) ds,$$

olettaen, että $f$ on kuten edellisessä tehtävässä?

5. Olkoon $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ riittävän sileä funktio, ja olkoon $\bar{a} \in \mathbf{R}^3$. Osoita, että

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{|\bar{\xi} + \bar{a}| \le t} f(\bar{\xi}) d\bar{\xi} = \int\limits_{|\bar{\xi} + \bar{a}| = t} f(\bar{\xi}) d\sigma(\bar{\xi}),$$

missä integrointeihin liittyvät merkinnät ovat kuten luentojen kohdissa (6.34)–(6.35).

***************************************************************************

1. Solve the following problem concerning the wave-equation on the interval $I := [0, 2] \subset \mathbf{R}$ using the Fourier-series method:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= u_{xx} \quad , \quad x \in I \ , t > 0, \\
u(0, t) &= u(2, t) = 0 \quad , \quad t > 0, \\
u(x, 0) &= \sin(3\pi x) \quad , \quad x \in I, \\
u_t(x, 0) &= 0 \quad , \quad x \in I.
\end{aligned}
$$

Calculate the energy functional for the solution $u$ and verify that it is constant with respect to time.

2. Denote $\bar{x} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ and $u = u(\bar{x}, t) = u(x, y, z, t)$ and consider the following Cauchy problem for the wave equation in $\mathbf{R}^3$:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= \Delta u \quad , \quad \bar{x} \in \mathbf{R}^3 \ , \ t > 0, \\
u(\bar{x}, 0) &= 0 \quad , \quad \bar{x} \in \mathbf{R}^3, \\
u_t(\bar{x}, 0) &= \phi(\bar{x}) \quad , \quad \bar{x} \in \mathbf{R}^3.
\end{aligned}
$$

Calculate $u(\bar{x}, t)$ for $\bar{x} = 0$, when $\phi(\bar{x}) = 4 - |\bar{x}|^2$, if $|\bar{x}| \leq 2$, and $\phi(\bar{x}) = 0$, if $|\bar{x}| > 2$ (modulus = length of vector).

3. Assume that the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ is twice continuously differentiable. Using just the definition of the derivative, prove the differentiation formula

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(t, s) ds = f(t, t) + \int_0^t \frac{\partial f(t, s)}{\partial t} ds$$

4. How do you calculate

$$\frac{d}{dt} \int_{-t}^0 f(t, s) ds$$

ja

$$\frac{d}{dt} \int_t^{3t+t^3} f(t, s) ds,$$

if $f$ is as in the previous problem?

5. Assume $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ is sufficiently smooth and let $\bar{a} \in \mathbf{R}^3$. Show that

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{|\bar{\xi}+\bar{a}| \leq t} f(\bar{\xi}) d\bar{\xi} = \int\limits_{|\bar{\xi}+\bar{a}| = t} f(\bar{\xi}) d\sigma(\bar{\xi}),$$

with notations as in (6.34)–(6.35) of the lecture notes.