OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 4
KEVÄT 2012

1. Tutki Burgersin yhtälön $uu_x + u_y = 0$ ratkaisua alkuehdolla $u(x,0) = h(x)$, missä $h(x) = a\ \ (> 0$, vakio), kun $x \leq 0$, $h(x) = a(1-x)$, kun $0 < x < 1$, ja $h(x) = 0$, kun $x \geq 1$.

2. Onko seuraava ODY funktiolle $u = u(x,y)$ elliptinen, hyperbolinen vai parabolinen:

$$u_{xx} + u_{yy} - 4u_{yx} + e^{-u^2} = e^{-x^2} \ ? \tag{1}$$

3. Tee lineaarinen muuttujan vaihto $\xi := \xi(x,y)$ ja $\eta := \eta(x,y)$ (käänteismuunnoksena $x = x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$) ja kirjoita (1) uudelle funktiolle $v(\xi,\eta) := u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ kanonisessa muodossa eli siten, että termin $v_{\xi\eta}$ kerroin on 0.

4.–5. Käytä d'Alembertin ratkaisua seuraavan alkuarvo–reuna–arvotehtävän ratkaisemiseen ($u = u(x,t)$, $x \in \mathbf{R}$, $x \geq 0$):

$$u_{tt} = u_{xx} \quad , \quad x \geq 0, t \geq 0,$$

$$u_t(0,t) = \alpha u_x(0,t) \quad , \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = \phi_0(x) \quad , \quad x \geq 0$$
$$u_t(x,0) = \phi_1(x) \quad , \quad x \geq 0.$$

Tässä $\alpha \neq -1$ on vakio, ja annetut funktiot ϕ_0 ja ϕ_1 ovat kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvia, ja ne häviävät jollain välillä $[0,b]$, missä $b > 0$.

****

1. How is the solution of the Burger equation $uu_x + u_y = 0$ with initial condition $u(x,0) = h(x)$, where $h(x) = a\ \ (> 0$, constant) for $x \leq 0$, $h(x) = a(1-x)$ for $0 < x < 1$, and $h(x) = 0$ for $x \geq 1$.

2. Is the following PDE for the function $u = u(x,y)$ elliptic, hyperbolic or parabolic:

$$u_{xx} + u_{yy} - 4u_{yx} + e^{-u^2} = e^{-x^2} \ ? \tag{1}$$

3. Perform a linear change of variables $\xi := \xi(x,y)$ and $\eta := \eta(x,y)$ (with inverse transform $x = x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$) and write (1) for the new function $v(\xi,\eta) := u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ in a form such that the coefficient of the term $v_{\xi\eta}$ equals 0.

4.–5. Use the d'Alembert solution to solve the following initial–boundary value problem ($u = u(x,t)$, $x \in \mathbf{R}$, $x \geq 0$):

$$u_{tt} = u_{xx} \quad , \quad x \geq 0, t \geq 0,$$

$$u_t(0,t) = \alpha u_x(0,t) \quad , \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = \phi_0(x) \quad , \quad x \geq 0$$
$$u_t(x,0) = \phi_1(x) \quad , \quad x \geq 0.$$

Here $\alpha \neq -1$ is a constant, and the known functions ϕ_0 and ϕ_1 are twice continuously differentiable and they vanish on an interval $[0,b]$, where $b > 0$.