OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 3
KEVÄT 2012

1. Osoita, että funktio

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-(x-y)^2/(4t)} dy$$

toteuttaa lämpöyhtälön $u_t = u_{xx}$, kun $x \in \mathbf{R}$, $t > 0$ ja g on vaikkapa paloittain jatkuva, rajoitettu funktio $\mathbf{R}$:ssä. Formaali derivointi integraalin sisällä riittää, mutta ylimääräistä kunniaa saa hän, ken taitaa selittää, miksi se on tässä luvallista.

2. Osoita derivoimalla, että jos $h : \mathbf{R} \times [0, \infty[\to \mathbf{R}$ on annettu jatkuva ja rajoitettu funktio, niin Cauchyn probleeman

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + h(x,t) \quad , \; x \in \mathbf{R}, t > 0,$$

$$u(x,0) = 0 \quad , \; x \in \mathbf{R}$$

ratkaisu on

$$u(x,t) := \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp\Big(\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\Big) h(\xi,\tau) d\xi d\tau.$$

3. Toteuttaako yhtälön

$$u_t = \frac{1}{4} u_{xx} - t \sin(2x) u$$

ratkaisufunktio $u = u(x,t)$ joukossa $\Omega := \{(x,t) \mid 0 < x < \pi, 0 < t < T\}$ (mikäli olemassa) Lauseen 3.3 heikon maksimiperiaatteen? (vihje: muuttujanvaihto)

4.–5. Käy läpi luennolla esitetty lämpöyhtälön alkuarvo–reuna–arvoprobleeman ratkaiseminen, kun $L = \pi$, reunafunktiot ovat $g_1(t) = e^{-t}$ ja $g_2(t) = 1$ ja alkuarvo $\phi(x) = 1$. Laske eksplisiittisesti menetelmässä esiintyvät Fourier–kertoimet. Mihin funktioon $h(x)$ ratkaisu $u(x,t)$ suppenee, kun $t \to \infty$?
****

1. Prove that the function

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-(x-y)^2/(4t)} dy$$

satisfies the heat equation $u_t = u_{xx}$ for $x \in \mathbf{R}$, $t > 0$ and any piecewise continuous bounded function g in $\mathbf{R}$. A formal differentiation under the integral sign is enough, though a more gloriuous solution would contain an explanation justifying this procedure.

2. For any continuous, bounded function $h : \mathbf{R} \times [0, \infty[\to \mathbf{R}$, show that a solution to the Cauchy problem

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + h(x,t) \quad , \ x \in \mathbf{R}, t > 0,$$

$$u(x,0) = 0 \quad , \ x \in \mathbf{R}$$

is given by

$$u(x,t) := \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp\Big(\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\Big) h(\xi,\tau) d\xi d\tau.$$

3. Does a solution function $u = u(x,t)$ of the PDE

$$u_t = \frac{1}{4} u_{xx} - t\sin(2x)u$$

satisfy the weak maximum principle in the set $\Omega := \{(x,t) \mid 0 < x < \pi, 0 < t < T\}$ (hint: change of variables).

4.–5. Work out the solution of the initial-boundary value problem for the heat equation, when $L = \pi$, and the boundary date is given by the functions $g_1(t) = e^{-t}$ ja $g_2(t) = 1$ and the initial data by $\phi(x) = 1$. Calculate explicitely the Fourier coefficients appearing in the procedure. To which function $h(x)$ does the solution $u(x,t)$ converge, when $t \to \infty$?