OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 2
KEVÄT 2012

1. Ratkaise seuraava ODY:n alkuarvotehtävä funktiolle $u = u(x, y)$ ja tutki, millä muuttujien arvoilla ratkaisu on olemassa:

$u_x + u^2 u_y = 1, \quad u(x, 0) = 1$.

2. Olkoon $u = u(x, t)$, $0 \le x \le 2\pi$ ja $t \ge 0$. Ratkaise probleema

$$
\begin{aligned}
&u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad , \quad 0 < x < 2\pi,\ t > 0\ , \\
&u(x,0) = \sin(8x) \quad , \quad 0 \le x \le 2\pi, \\
&u(0,t) = u(2\pi,t) = 0 \quad , \quad t \ge 0.
\end{aligned}
$$

3. Olkoon $u = u(x, t)$, $-2 \le x \le 1$ ja $t \ge 1$. Muunna sopivalla muuttujanvaihdolla ongelma

$$
\begin{aligned}
&u_t(x,t) = 3u_{xx}(x,t) \quad , \quad -2 < x < 1,\ t > 1\ , \\
&u(x,1) = \sin(\pi x) \quad , \quad -2 \le x \le 1, \\
&u(-2,t) = u(1,t) = 0 \quad , \quad t \ge 1.
\end{aligned}
$$

luennolla esitettyyn muotoon. (Valitse vakiot a, b, c ja d siten, että funktio $v(x, t) := u(ax + b, ct + d)$ toteuttaa luennolla esitetyn lämpöyhtälön alku-reuna-arvo-ongelman.)

4.–5. Käy läpi luennolla esitetty lämpöyhtälön alkuarvo–reuna–arvoprobleeman ratkaisu, kun $L = 1$, reunafunktiot g_1 ja g_2 ovat 0, ja alkuarvo $\phi(x) = x(1-x)$. Laske menetelmässä esiintyvät Fourier–kertoimet. Mihin funktioon $h(x)$ ratkaisu $u(x, t)$ suppenee, kun $t \to \infty$?

****

1. Solve the following PDE - initial value problem for the function $u = u(x, y)$, and find the values of the variables x and y for which the solution exists:

$u_x + u^2 u_y = 1, \quad u(x, 0) = 1$.

2. Let $u = u(x, t)$, $0 \le x \le 2\pi$ and $t \ge 0$. Solve the problem

$$
\begin{aligned}
&u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad , \quad 0 < x < 2\pi,\ t > 0\ , \\
&u(x,0) = \sin(8x) \quad , \quad 0 \le x \le 2\pi, \\
&u(0,t) = u(2\pi,t) = 0 \quad , \quad t \ge 0.
\end{aligned}
$$

3. Let $u = u(x,t)$, $-2 \leq x \leq 1$ ja $t \geq 1$. Using a suitable change of variables, write the problem

$$\begin{aligned}
&u_t(x,t) = 3u_{xx}(x,t) \quad , \quad -2 < x < 1,\, t > 1 \; , \\
&u(x,1) = \sin(\pi x) \quad , \quad -2 \leq x \leq 1, \\
&u(-2,t) = u(1,t) = 0 \quad , \quad t \geq 1.
\end{aligned}$$

in the form explained on the lectures. (Choose the constants a, b, c and d such that the function $v(x,t) := u(ax+b, ct+d)$ satisfies the initial-boundary value problem for the heat equation in the form presented on the lectures.)

4.–5. Using the method described on the lectures, solve the intial-boundary value problem for the heat equation when $L = 1$, the boundary values g_1 ja g_2 equal 0, and the initial value is $\phi(x) = x(1-x)$. Calculate the Fourier coefficients appearing in the solution. To which function $h(x)$ does the solution $u(x,t)$ converge, when $t \to \infty$?