OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 11
KEVÄT 2012

1.–2. Etsi ominaisarvoja λ ja ominaisfunktioita $f \neq 0$, jotka ovat integraaliyhtälön

$$\lambda f(x) - \int_0^\pi K(x,y) f(y) dy = 0 \quad , \quad x \in [0,\pi]$$

ratkaisuja, kun

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \sin(nx) \sin(ny).$$

3.–5. Onko integraaliydin

k) $K(s,t) = 1 + \sin(\pi(s+t))$,

e) $K(s,t) = e^{-(s-t)}$

s) $K(s,t) = e^{-|s-t|}$

ä) $K(s,t) = e^{-(s-t)^2}$

(s, $t \in [0,1]$) degeneroitunut, eli muotoa

$$K(s,t) = \sum_{j=1}^{n} M_j(s) N_j(t) \tag{1}$$

jollekin $n \in \mathbf{N}$ ja joillekin funktioille $M_j : [0,1] \to \mathbf{R}$ ja $N_j : [0,1] \to \mathbf{R}$? Jos vastaus on positiivinen, ortonormita jono $(N_j)_{j=1}^n$ avaruuden $L^2([0,1])$ sisätulon $(\phi|\psi) := \int_0^1 \phi(s)\psi(s) ds$ suhteen, ja esitä ydin K muodossa (1) tämän uuden jonon avulla. Negatiivisen vastauksen tapauksessa riittää perusteltu arvaus.

****

1.–2. Find (some) eigenvalues λ and eigenfunctions $f \neq 0$, which are solutions of the integral equation

$$\lambda f(x) - \int_0^\pi K(x,y) f(y) dy = 0 \quad , \quad x \in [0,\pi],$$

where

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \sin(nx) \sin(ny).$$

3.–5. Are the following integral kernels

k) $K(s,t) = 1 + \sin(\pi(s+t))$,

e) $K(s,t) = e^{-(s-t)}$

s) $K(s,t) = e^{-|s-t|}$

ä) $K(s,t) = e^{-(s-t)^2}$

($s,\ t \in [0,1]$) degenerate, i.e., of the form

$$K(s,t) = \sum_{j=1}^{n} M_j(s) N_j(t) \tag{1}$$

for some $n \in \mathbf{N}$ and some functions $M_j : [0,1] \to \mathbf{R}$ and $N_j : [0,1] \to \mathbf{R}$? If the answer is positive, make the sequence $(N_j)_{j=1}^n$ orthonormal with respect to the inner product $(\phi|\psi)$ $:= \int_0^1 \phi(s)\psi(s)ds$ of the space $L^2([0,1])$, and write the kernel K in the form (1) using this new sequence. In case of negative answer, just give some reasons instead of a full proof.