OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
LASKUHARJOITUS 10
KEVÄT 2012

1. Seuraavan Fredholmin integraaliyhtälön ratkaisu on enintään toisen asteen polynomi. Etsi ratkaisu (alkeellisesti) sijoittamalla tällainen polynomi yhtälöön ja ratkaisemalla siitä kertoimet.

$$\phi(s) = s + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(s+t)\phi(t)dt \quad , \quad s \in [-1,1].$$

2. Samoin yhtälölle

$$\phi(s) = 1 + \int_{0}^{2\pi}\cos(s-t)\phi(t)dt \quad , \quad s \in [0,2\pi].$$

3. Onko Fredholmin integraaliyhtälöllä

$$\phi(s) - \int_{0}^{1} e^{-t+s}\phi(t)dt = s^2 \quad , \quad s \in [0,1].$$

ratkaisua? (Osoita, että adjungoidun homogeeniyhtälön ratkaisun täytyy olla muotoa Ce^{-s}.)

4. Entä onko yhtälöllä

$$\phi(s) + \int_{0}^{1} e^{-t+s}\phi(t)dt = s^2 \quad , \quad s \in [0,1].$$

ratkaisua?

5. Osoita, että yksikerrospotentiaali

$$u(\bar{x}) := \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\psi(\bar{y})\log\frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|}d\sigma(\bar{y})$$

on jatkuva joukossa $\mathbf{R}^2$, kun $\psi \in C^1(\partial\Omega)$.
Ohje. On osoitettava, että kaikilla $\bar{x}_0$,

$$\lim_{\bar{x}\to x_0} u(\bar{x}) = u(\bar{x}_0),$$

missä $\bar{x}$ on joko sisä– tai ulkoalueessa. Käytä luentojen kaavaa (9.13) ja ota siinä sellainen funktio $v \in C^2(\bar{\Omega})$, että $v(\bar{x}) = 0$ joukossa $\partial\Omega$ ja $\partial_\nu v(\bar{x}) = \psi(\bar{x})$ joukossa $\partial\Omega$.

****

1. The solution of the following Fredholm integral equation is a polynomial of at least second order. Find the solution by putting such a polynomial to the equation and solving the coefficients.

$$\phi(s) = s + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(s+t)\phi(t)dt \quad , \quad s \in [-1, 1].$$

2. Similarly for the equation

$$\phi(s) = 1 + \int_{0}^{2\pi}\cos(s-t)\phi(t)dt \quad , \quad s \in [0, 2\pi].$$

3. Does the Fredholm integral equation

$$\phi(s) - \int_{0}^{1} e^{-t+s}\phi(t)dt = s^2 \quad , \quad s \in [0, 1].$$

have a solution? (Show that solutions of the adjoint homogeneous equation must be equal to Ce^{-s}.)

4. What about the equation

$$\phi(s) + \int_{0}^{1} e^{-t+s}\phi(t)dt = s^2 \quad , \quad s \in [0, 1].$$

5. Show that the single layer potential

$$u(\bar{x}) := \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\psi(\bar{y})\log\frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|}d\sigma(\bar{y})$$

is continuous in $\mathbf{R}^2$, when $\psi \in C^1(\partial\Omega)$.
Advice. One has to prove that for all $\bar{x}_0$,

$$\lim_{\bar{x}\to x_0} u(\bar{x}) = u(\bar{x}_0),$$

where $\bar{x}$ is in the interior or exterior domain. Use the formula (9.13) of the lecture note and take there a $v \in C^2(\bar{\Omega})$ such that $v(\bar{x}) = 0$ in $\partial\Omega$ and $\partial_\nu v(\bar{x}) = \psi(\bar{x})$ in $\partial\Omega$.