MATEMATIIKAN HISTORIAN LUENTOJA

Matti Lehtinen

Sisällys

1 Johdanto

1.1 Miksi matematiikan historiaa?

Matematiikka näyttää olevan oppirakennelma, jonka sisällön määrää ajasta ja paikasta riippumaton looginen välttämättömyys, Monet matematiikkaan sisältyvät käsitteet, käytänteet ja merkinnät tulevat selvemmiksi ja ymmärrettävämmiksi, kun tiedetään jotakin niiden takana olevista historiallisista syistä ja kehityskuluista. Matematiikan oppimisen vaikeus ei hämmästytä, kun ajattelee, että monien nykyään matematiikan peruskursseihin kuuluvien asioiden keksiminen ja hiominen on vaatinut ihmiskunnan ehkäpä terävimpien aivojen ponnisteluja, yrityksiä ja erehdyksiä, jopa vuosisatojen ajan. Oppikursseissa matematiikan tulokset tulevat oppijaa vastaan usein kiillotettuina ja virtaviivaistettuna. Tutkimuksen ja soveltamisen ongelmat, kun niitä ihan itse pitää ratkoa, puolestaan tuntuvat usein aivan ylivoimaisilta. Historia auttaa näkemään, että ne virtaviivaiset osatkin ovat usein vaivalla rakentuneet.

Matematiikan haarautuminen sadoiksi osa-alueiksi hämärtää käsityksiä matematiikan yhtenäisyydestä. Matematiikan historiaa seuraamalla kuva matematiikasta kuitenkin yhtenä oppina kirkastuu.

Matemaatikoilla on kuten muidenkin tieteenalojen edustajilla tapana pystyttää aineettomia muistomerkkejä kollegoilleen nimeämällä käsitteitä ja matemaattisia tuloksia heidän mukaansa. Toisinaan nimitykset eivät osu aivan kohdalleen: herra X:n teoreeman onkin todistanut herra Y, toisin kuin nimen käyttöön ottanut herra Z aikanaan luuli. Ei tarvitse ottaa kantaa siihen filosofiseen kysymykseen, onko matematiikka olemassa ihmisistä riippumatta, vai onko se ihmisluomus, kun sanoo, että matematiikan tuloksiin liittyy ihmisiä ja heidän työtään. Matematiikan historian kurssin yksi pyrkimys on kertoa jotakin matematiikan nimien takaa löytyvistä ihmisistä ja heidän vuorovaikutuksestaan.

Luonnollisesti matematiikan historian kurssi pyrkii myös herättämään kiinnostusta matematiikkaan yhtenä ihmisen kulttuurin olennaisena osana – matematiikan vaaliminen kulttuurina kun ei voi olla kenenkään muun kuin matemaatikkojen ja matematiikan opettajien itsensä asia. He ovat joka tapauksessa avainasemassa, kun pyritään murtamaan niitä sangen sitkeitä käsityksiä, joiden mukaan matematiikka on jotain epäinhimillistä, sellaista, jota normaali sivistynyt ihminen ei voi ymmärtää ja jonka ymmärtäminen ei myöskään ole millään tavalla tarpeellista. Matematiikan populaari esittely ”suurelle yleisölle” tuntuu välillä nojautuvan liiaksikin juuri matematiikan historiaan. Mutta tämäkin mahdollinen vinouma puoltaa sitä, että matematiikan erilaisilla ammattilaisilla olisi hyvä olla jollakin lailla tasapainoinen ja kattava kuva matematiikan historiasta.

Ja matematiikan historia on kiehtovaa!

1.2 Tästä luentosarjasta

Matematiikan historiaa voi lähestyä eri näkökulmista: sitä voi yrittää seurata kronologisesti, maantieteellisesti, matematiikassa omaksutun sisäisen aihejaottelun mukaisesti, matematiikan ja ympäröivän maailman vuorovaikutuksia tarkkaillen, matemaatikkojen henkilökuvia piirtäen jne. Tässä esityksessä on valittu yksinkertaisin tapa, pääasiassa kronologinen eteneminen. Niin kauan kuin liikutaan verrattain kaukaisessa menneisyydessä, tapa on mielekäs. Nykyaikaa lähestyttäessä matemaattisen tiedon kasvu ja monimutkaistuminen aiheuttaa samanaikaisten ilmiöiden tulvan, ja enemmän aiheenmukainen käsittelytapa tuntuu ainoalta mahdolliselta.

Matematiikan historiasta on luonnollisesti jokseenkin mahdotonta puhua ilman matematiikkaa itseään ja sen tuntemusta. Matematiikan historian ilmiöiden sitoutuvat aikoihin ja paikkoihin. Kurssin seuraaminen edellyttää ainakin jonkinasteista historian ja maantieteen yleissivistystä. Joudutaan siis lähtemään oletuksesta, että matematiikka ja historia eivät olisi kuulijoille aivan vieraita. Painotus tulee kuitenkin väistämättä olemaan vähemmän sofistikoidun matematiikan puolella, ja varsinaisia esitietovaatimuksia ei voi esittää. Toivottavasti historian kurssi opettaa hiukan itse matematiikkaakin.

Oikeaoppinen historioitsija ei saisi luottaa toisen käden lähteisiin. Näissä luennoissa nojaudun lähes yksinomaan alan oppikirjoihin. Lähdeviitteitä en esitä, mutta erillisessä kirjallisuusluettelossa lyhyesti esitellyistä teoksista on ollut minulle hyötyä. Niistä saa täydennystä myös lisätietoja kaipaava. – Matematiikan historiaa koskevia alkuperäisartikkeleita lukiessa tulee usein ajatelleeksi, että historioitsijoiden päätavoite on kumota tarkastelun kohteena olevista ilmiöistä vallitsevat vakiintuneet käsitykset. Oma tavoitteeni on vähemmän kunnianhimoinen; ennemminkin pyrin esittelemään näitä vakiintuneita käsityksiä.

* * *

Tämä teksti on syntynyt runsaan 30 vuoden aikana pitämieni luentokurssien tueksi; olen sitä aikojen kuluessa muutellut ja korjaillut. Erityisen kiitollinen olen dosentti *Jouni Luukkaiselle*, joka loppusyksystä 2011 luki tekstini huolellisesti ja esitti lukuisia korjauksia ja täsmennyksiä, jotka melkein kaikki olen ottanut huomioon. Bittimaailmassa elävää tekstiä on helppo muuttaa. Otan edelleen mielelläni vastaan kaikki korjaus- ja parannusehdotukset.

1.3 Matematiikan historian suuret kaudet

Ennen kuin käydään lähemmin tarkastelemaan eri aikakausien matematiikkaa, on hyödyllistä luoda hyvin suurpiirteinen katsaus matematiikan koko 5000-vuotiseen historiaan.

Matematiikan historian suuria periodeja ovat ensinnäkin *esikreikkalainen antiikki*, etenkin ns. *babylonialaisen matematiikan* kukoistuskausi n. 2000 eKr., sitten *kreikkalainen ja hellenistinen antiikki*, lähes tuhannen vuoden jakso noin 500 eKr. – 300 jKr., *intialainen varhaiskeskiaika* noin 500 – 1200 jKr., *islamin* eli *arabialaisen matematiikan* kulta-aika noin 800 – 1200 jKr., *renessanssi* lähinnä Italiassa 1500-luvulla, uuden matematiikan pääalan, *analyysin*, synty Euroopassa 1600-luvulla ja sen nopea kehitys 1700-luvulla sekä matematiikan yleinen abstrahoituminen ja laajeneminen 1800-luvulla. Edelliseen luetteloon voi varmasti lisätä 1900-luvun, joka on luultavasti kasvattanut matemaattista tietoa yhtä paljon kuin mikä hyvänsä aikaisempi periodi ja jonka aikana suurin osa kaikkien aikojen matemaatikoista on elänyt.

2 Matematiikan esihistoriasta

Nykymatematiikan monimutkainen ja abstrakti käsitemaailma pohjautuu perimmältään lukumäärää, kokoa ja muotoa koskeviin havaintoihin. Tieto siitä, miten nämä ovat saaneet systemaattista muotoa primitiivisten kansojen keskuudessa, on lähinnä epäsuorien todisteiden ja spekulaatioiden varassa. Alan tutkijat ovat mm. esittäneet teorioita laskemisen tai geometrian synnystä käytännön tarpeiden vaatimusten mukaan ja toisaalta ajatuksia matematiikan mahdollisesta rituaalis-uskonnollisesta alkuperästä.

Lukumäärän ja jako-osuuden ilmaisemisen tarve on ilmeinen jo keräily- ja pyyntikulttuureissa. Useimmissa kielissä ilmenevä suurempien lukujen kokoaminen pienemmistä yksiköistä on ilmeisen matemaattinen oivallus. Kielitieteellisen todistusaineiston avulla voidaan päätellä, että useimmissa kulttuureissa lukujen ilmaiseminen on perustunut tavalla tai toisella ihmisen ruumiinrakenteen kannalta luonnolliseen kymmen- tai viisijärjestelmään, mutta myös esim. kaksikymmenjärjestelmää (vaikkapa ranskan kielessä 80 on *quatre-vingts* 'neljä kertaa kaksikymmentä' ja 90 *quatre-vingt-dix* 'neljä kertaa kaksikymmentä ja kymmenen' tai latinassa 18 *duodeviginti*, 19 *undeviginti* 'kaksi', 'yksi kahdestakymmenestä') ja kaksi- tai kolmejärjestelmää esiintyy. – Suomessa ja sen sukukielissä voi aavistella kymmenjärjestelmän alkua vaikkapa *yksi, yhden – yhdeksän* ja *kaksi, kahden – kahdeksan* -sanapareista. Kahdeksan ja yhdeksän alkuperäisiksi merkityksiksi kielitiede esittää 'kaksi puuttuu' ja 'yksi puuttuu'. Sanan *kymmenen* etymologinen selitys on 'kämmen' tai 'kaksi kämmentä', jonka voi tulkita tarkoittavan sormilla laskemista niin, että kaikki sormet on taivutettu kämmentä vasten. Suomalais-ugrilaisten kielten tutkimus on osoittanut, että lukusanat kaksi ja viisi ovat kielemme vanhinta kerrosta.

Kielitieteellisiä todisteita voi halutessaan nähdä myös geometrian peruskäsitteissä. Mielenkiintoiselta tuntuu esim. se, että kulman tai kolmion kylkiin liittyvät nimitykset ovat monissa kielissä raajojen nimiä.

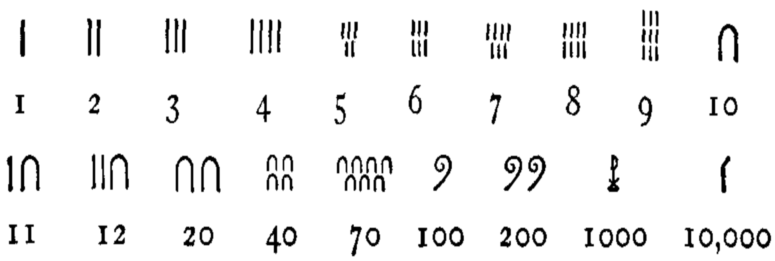
Geometrisia koristekuvioita tavataan jo kivikaudenaikaisessa keramiikassa ja tekstiileissä – näin voitaisiin ajatella geometrian syntyneen ihmisen esteettisistä tarpeista. Maanviljelyksen ja maanomistuksen kehittyminen on tuonut mukanaan tarpeen mitata maata. Geometrian merkitys rituaaleissa tulee ilmi esim. varhaisimmissa intialaisissa matemaattisissa teksteissä, *Sulvasutrissa*, joissa käsitellään temppelien alttarien mittasuhteiden määrittämistä, tai ns. *Deloksen ongelmassa* eli kuution kahdentamisongelmassa, jonka perinteinen muotoilu koski kuutionmuotoista alttarikiveä.

3 Muinaiskulttuurien matematiikasta

Matematiikasta edes jossain määrin siinä mielessä kuin sana nykyisin ymmärretään, voidaan ruveta puhumaan *Egyptin*, *Mesopotamian*, *Intian* ja *Kiinan* jokilaaksojen ensimmäisten suurten muinaiskulttuurien yhteydessä (amerikkalaiset maya- ja inkakulttuurit ovat ajallisesti paljon myöhäisempiä ja maantieteellisesti kokonaan erossa matematiikan kehityksestä). Karkeasti ottaen kahta–kolmea vuosituhatta ennen ajanlaskumme alkua näissä kulttuureissa kehittyneet maanviljelys, keinokastelu sekä eriytynyt yhteiskuntajärjestys ja keskitetty hallinto edellyttivät melkoisessa määrin laskemista. Nykyään on luotavissa joltisenkin selkeä kuva kahden ensiksi mainitun kulttuurin matematiikasta; länsimaisen matematiikan kehitykselle on muinaiskulttuureista merkittävin vaikutus ollut Mesopotamian matematiikalla eli babylonialaisella matematiikalla.

3.1 Egyptin matematiikkaa

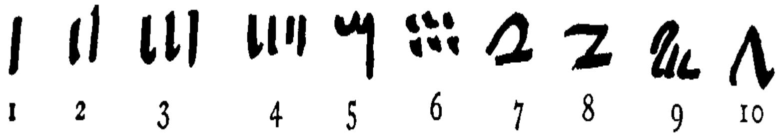
Egyptiläisessä hieroglyfikirjoituksessa käytettävä numeroiden merkintätapa on peräisin viimeistään noin vuodelta 3000 eKr. Sen periaate on sama kuin roomalaisten numeroiden: kullekin kymmenen potenssille on oma symbolinsa, joka toistetaan numeroa kirjoitettaessa tarpeellisen monta kertaa. Numerot kirjoitettiin niin, että korkeampia kymmenen potensseja esittävät merkit olivat oikealla. Egyptiläisistä piirtokirjoituksista on löydetty jopa miljoonan suuruusluokkaa olevia lukuja.



Hieroglyfinumeroita

Noin 2000 eKr. numeromerkintä kehittyi nykyisempään suuntaan, kun ns. hieraattisessa kirjoitustavassa eri numeroita alettiin merkitä omilla symboleillaan. Suurin osa säilynyttä egyptiläistä matematiikkaa on kirjoitettu hieraattisella kirjoituksella.

Egyptiläisten ajanlasku oli verrattain kehittynyt. Vuodessa oli 12 30 päivän kuukautta ja 5 tasauspäivää. Rakennustaiteen tuotteet osoittavat nekin huomattavia matemaattisia taitoja. (Pyramidit; etenkin Kheopsin pyramidin mittasuhteisiin liittyvät myöhemmät numerologiset spekulaatiot lienevät kuitenkin perusteettomia.) Tällaisten epäsuorien todisteiden lisäksi on käytettävissä muutamia suoraan egyptiläistä matematiikanharjoitusta



Hieraattisia numeroita

valaisevia lähteitä, joista tärkeimmät ovat kaksi sisällöltään matemaattista papyruskääröä, ns. *Rhindin papyrus*, noin vuodelta 1650 eKr., ja ns. *Moskovan papyrus* noin vuodelta 1850 eKr.

Rhindin eli *Ahmesin* papyrus sisältää 85 etupäässä aritmeettista tehtävää vastauksineen ja eräitä laskemista helpottavia taulukoita. Teksti on varsin lyhyttä eikä aivan helposti avautuvaa. (Ahmes oli papyruksen puhtaaksikirjoittaja, joka kuitenkin vain kopioi luultavasti paljon vanhempaa tekstiä, *Henry Rhind*, 1833–63, puolestaan skottilainen pankkiiri ja keräilijä, joka osti papyruskäärön vuonna 1858 Luxorin basaarista. Papyruskäärö on n. 5 metriä pitkä ja vajaan metrin leveä; nykyään se on ainakin ajoittain nähtävissä esillä British Museumissa Lontoossa.)

Rhindin papyruksen tietojen perusteella egyptiläisen aritmetiikan keskeisiä piirteitä ovat additiivisuus, kahdennukseen ja osittelulakiin perustuva kerto- ja jakolasku sekä yksikkömurtolukujen käyttö. Siten esim. kertolaskussa $69 \cdot 19 = 69 \cdot (16 + 2 + 1)$ laskettiin $69+69 = 138$, $138+138 = 276$, $276+276 = 552$, $552+552 = 1104$ ja $1104+138+69 = 1311$. Egyptiläinen kertolasku perustui siis itse asiassa luvun binaariesitykseen. (On helppo todistaa, että jokainen positiivinen kokonaisluku n on summa $\sum_{j=0}^{k} a_j 2^j$, $a_j \in \{0, 1\}$.)

Murtoluvuista egyptiläiset käyttivät vain lukua $\dfrac{2}{3}$ ja muotoa $\dfrac{1}{n}$ olevia lukuja eli *yksikkömurtolukuja*. Syy tähän on luultavasti lukujen merkintätapa: yksikkömurtoluvun merkkinä oli nimittäjän numerosymboli, jonka päälle piirrettiin pieni soikio tai piste. Koska $\dfrac{1}{n}$:n kahdentaminen tuottaa luvun $\dfrac{2}{n}$, joka ei yleensä ollut sallittua muotoa, oli käytössä taulukkoja $\dfrac{2}{n}$:n lausumiseksi muodossa $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \ldots + \dfrac{1}{c}$. Rhindin papyrus sisältää tällaisen taulukon kaikille parittomille n:ille välillä $[5, 101]$. (Triviaalia jakoa $\dfrac{2}{n} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}$ egyptiläiset eivät kelpuuttaneet.) – Englantilainen *J.J. Sylvester* osoitti 1800-luvulla, että jokainen ykköstä pienempi murtoluku voidaan esittää äärellisenä yhden tai useamman yksikkömurtoluvun summana ja esitti erään algoritmin, jolla tämä voidaan tehdä. Todistus voidaan tehdä induktiolla murtoluvun osoittajan suhteen:

> Olkoon $p \geq 2$. Oletetaan, että kaikki murtoluvut $\dfrac{k}{q}$ voidaan kirjoittaa yhden tai useamman eri yksikkömurron summaksi, kun $k < p$. (Tämä pitää tietysti paikkansa, kun $p = 2$.) Jos p on q:n tekijä, $\dfrac{p}{q}$ supistuu yksikkömurtoluvuksi. Muussa tapauksessa olkoon $\dfrac{1}{n}$ suurin yksikkömurto, joka on pienempi kuin $\dfrac{p}{q}$.

Silloin $n > 1$ ja
$$\frac{1}{n} < \frac{p}{q} < \frac{1}{n-1}$$
eli $0 < np - q < p$. Mutta
$$\frac{p}{q} = \frac{1}{n} + \frac{np-q}{nq}.$$
Koska $np - q < p$, $\dfrac{np-q}{nq}$ on eri yksikkömurtojen summa; koska $\dfrac{np-q}{nq} < \dfrac{1}{n}$, yksikään niistä ei ole $\dfrac{1}{n}$.

Egyptiläinen jakolasku: lasketaan esimerkiksi $\dfrac{19}{8}$. Se on luku, joka kerrottuna 8:lla antaa 19. Lasketaan $1 \cdot 8 = 8$, $2 \cdot 8 = 16$, $\dfrac{1}{2} \cdot 8 = 4$, $\dfrac{1}{4} \cdot 8 = 2$, $\dfrac{1}{8} \cdot 8 = 1$; koska $19 = 16 + 2 + 1$, $\dfrac{19}{8} = 2 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}$.

Egyptiläisten kirjureiden laskennon oppikirjaksi ilmeisesti tarkoitettu Rhindin papyrus sisältää joukon tehtäviä, jotka on tulkittavissa muotoa $x + ax = b$ oleviksi ensimmäisen asteen yhtälöiksi, vieläpä siinä määrin abstraktissa muodossa, että tuntematon ei ole aivan konkreettinen määrä jotain konkreettista hyödykettä, vaan abstraktimpi *aha*, 'kasa'. Yhtälön ratkaisu löydettiin menettelyllä, jota sittemmin on alettu kutsua nimellä *positio falsi* eli väärä sijoitus: tuntemattoman suuruus "arvattiin", laskettiin tätä arvausta vastaava "yhtälön oikea puoli" ja korjattiin arvausta tunnetun oikean puolen avulla.

Esim. "Kasa ja $\dfrac{1}{7}$ kasaa on 19. Kuinka suuri on kasa?" Jos kasa olisi 7, kasa ja $\dfrac{1}{7}$ kasaa olisi 8; koska $19 = (2+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8})\cdot 8$, tehtävän oikea vastaus $16+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}$ saadaan, kun lasketaan $7 \cdot \left(2 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}\right) = (1 + 2 + 4) \cdot \left(2 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}\right) = \left(2 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}\right) + \left(4 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right) + \left(8 + 1 + \dfrac{1}{2}\right) = 16 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8}$.

Rhindin Papyrus sisältää vielä tarkistuksen, ts. "todistuksen": todellakin
$$16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7} \cdot \left(16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = 19.$$

Egyptiläisten tuntemat algebralliset tehtävät rajoittuvat vain lineaarisiin yhtälöihin. Toisen tai korkeamman asteen yhtälöihin johtavia tehtäviä ei muinaisessa Egyptissä ilmeisesti tarvittu eikä hallittu.

Kreikkalainen historioitsija *Herodotos* (n. 484 – n. 425 eKr.) katsoi kreikkalaisten oppineen geometrian egyptiläisiltä, jotka olivat tarvinneet geometriaa maanmittaukseen: faarao oli alkuaan antanut ihmisille viljelysmaata, kullekin yhtä paljon, ja määrännyt maasta veron. Niilin tulvan jälkeen viljelypalstojen koko muuttui. Maanmittarit, geometrit eli köydenpingottajat, olisivat sitten määrittäneet uudet veroperusteet. Egyptiläisten varsinainen geometrinen tietämys on säilyneistä lähteistä päätellen ollut kuitenkin melko niukkaa. Erään

Rhindin papyruksen tehtävän (numero 50) mukaan ympyrän ala olisi laskettu tavalla, joka vastaisi π:n jokseenkin hyvää likiarvoa $\frac{256}{81} = 3{,}16\ldots$: "Pyöreän pellon halkaisija on 9 *ket*iä. Mikä on sen pinta-ala? Ota halkaisijasta $\frac{1}{9}$, eli 1; jäännös on 8. Kerro 8 kertaa 8: tulos on 64. Siis ala on 64 *setat*ia."

Jos olisi $\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2$, olisi $\pi = \frac{4 \cdot 64}{81} = \frac{256}{81}$. Luonteva selitys tälle arviolle on verrata ympyrää neliöön, jonka sivu on d. Jos neliö jaetaan yhdeksään yhtenevään pikkuneliöön, niin näkee helposti, että ympyrän ala ei paljon poikkea alasta, joka on $\frac{7}{9}d^2 = \frac{63}{81}d^2 \approx \frac{64}{81}d^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2$. – Rhindin papyruksessa on muitakin likimääräismenetelmiä: nelikulmio, jonka sivut ovat a, b, c ja d saa alakseen $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$.

Epäsuorasti voidaan päätellä, että egyptiläiset olisivat tienneet, että yhdenmuotoisten kuvioiden alojen suhde on vastinsivujen suhteen neliö; asiaa ei tietenkään täsmällisesti formuloitu tai "todistettu". Mitään varsinaisia todisteita siitä, että egyptiläiset olisivat tunteneet esimerkiksi Pythagoraan lauseen sisällön, ei ole.

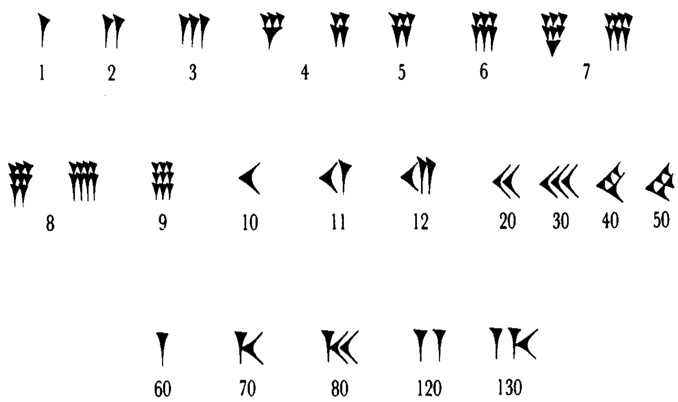
Ehkä yllättävin egyptiläistä geometriaa koskeva tieto löytyy Rhindin papyrusta parisataa vuotta vanhemmasta ja muuten sitä suppeammasta Moskovan papyruksesta: siinä lasketaan erään katkaistun neliöpohjaisen pyramidin tilavuus käyttäen selvästi oikeaa kaavaa $V = \frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$. (Papyrykseen piirretyssä kuviossa on profiili katkaistusta pyramidista, luvut 4 ja 2 pohjan ja kannen särmänpituuksina ja 6 korkeutena sekä laskutoimitus, joka johtaa oikeaan tilavuuteen 56.) Tälle tulokselle osaa antaa arvoa, kun huomaa, että puolisuunnikkaan alan kaavan yleistykseen perustuvan virheellisen kaavan "$V = h \cdot \frac{a^2+b^2}{2}$" saattaa löytää vielä 1900-luvulla painetuista oppikirjoista. – Kaavoja sanan nykymielessä eivät egyptiläiset tosin kirjoittaneet: kaikki asiat esitettiin sanallisina toimintaohjeina ja konkreettisin numerolaskuin.

3.2 Babylonialainen matematiikka

Muinaiskulttuureista kehittynein matematiikka oli ilmeisesti Mesopotamiassa, nykyisen Irakin alueella. Tätä matemaattista kulttuuria on tapana kutsua *babylonialaiseksi*, vaikka aluetta vallitsivat ja matematiikkaa harjoittivat vuosituhansien aikana useat muutkin kansat sumerilaisista alkaen.

Babylonialaisen kulttuurin ja matematiikankin yhdistävä ulkoinen piirre on nuolenpää- eli kiilakirjoitus. Kirjoitussymbolien kiilamuoto johtuu siitä, että ne synnytettiin painamalla poikkileikkaukseltaan kolmiomaista kirjoitinpuikkoa vinosti saveen. Koviksi poltetut savitaulut ovat erittäin kestäviä, ja niitä on löydetty tuhansittain, joukossa kolmisensataa sisällöltään matemaattista. Nämä taulut ajoittuvat kolmelle kaudelle, vuoden 2100 eKr. ympäristöön, vuosille 1800–1600 eKr. (Hammurabin aika) ja vuosille 600 eKr. – 300 jKr.; mielenkiintoisimmat ovat keskimmäiseltä jaksolta.

Babylonialainen numeromerkintä välillä 1–59 noudatti samaa periaatetta kuin egyptiläisen hieroglyfikirjoituksenkin. Ykkösellä ja kymmenellä oli omat nuolenpäämerkkinsä, joita toistettiin tarvittava määrä. Suurempia lukuja merkittäessä käytettiin kuitenkin 60-kantaista *paikkajärjestelmää*. Siten esim. 60 merkittiin samalla merkillä kuin 1, 61 kahdella vierekkäisellä ykkösen merkillä jne. Käytössä oli siis 60-kantainen lukujärjestelmä eli *seksagesimaalijärjestelmä*. Merkintätapaa sovellettiin myös ykköstä pienempiin lukuihin. Babylonialainen merkintätapa on yhä käytössä asteen tai tunnin jaossa minuuteiksi ja edelleen sekunneiksi. Ympyrän kehän jakaminen 360 asteeseen on alkuperältään epäselvempi. Sitä käytettiin tähtitieteessä ensimmäisinä vuosisatoina ennen ajanlaskumme alkua. Eräänä selityksenä on tarjottu π:n likiarvoa 3. Kun ympyrän säde jaetaan 60-järjestelmän mukaisesti kuudeskymmenesosiin, niin kehälle näitä samoja jako-osia tulisi 360.



Babylonialaisia numeromerkintöjä

”Seksagesimaalipilkun” ja nollan puuttuminen teki babylonialaisesta numeromerkinnästä monitulkintaisen: ”22” saattoi olla esim. $2{\cdot}60+2 = 122$, $2{\cdot}3600+2 = 7202$ tai $2+\frac{2}{60}$. Nollaa tarkoittava symboli tuli osittain käyttöön muutamana ajanlaskumme alkua edeltävänä vuosisatana. Nollaa käytettiin kuitenkin vain muiden numeromerkkien välissä, ei luvun lopussa. Seksagesimaaliluvut esitetään nykyajan teksteissä niin, että eri 60:n potenssien kertoimet erotetaan pilkuilla ja ”ykkösten” ja ”kuudeskymmenesosien” väliä merkitään puolipisteellä; esimerkiksi $2, 35, 11; 17 = 2 \cdot 3600 + 35 \cdot 60 + 11 + \frac{17}{60} = 9311\,\frac{17}{60}$.

Babylonialaisten käytännöllinen numeromerkintä teki tarkat numerolaskut periaatteessa yhtä helpoiksi kuin nykyäänkin. Säilyneissä savitauluissa on esimerkkejä kertomatauluista, jotka 60-järjestelmässä ovat laajempia kuin meille tutut. Useat jakolaskut oli helppo palauttaa kertolaskuiksi, koska murtoluvut $\frac{1}{k}$, missä k on 60:n tekijä ovat yksinkertaisia seksagesimaalilukuja ($\frac{1}{2} = 0; 30$, $\frac{1}{3} = 0; 20$, $\frac{1}{4} = 0; 15$, $\frac{1}{5} = 0; 12$, $\frac{1}{6} = 0; 10$, $\frac{1}{8} = 0; 7, 30$ jne. Jakolaskujen helpottamiseksi käytössä oli käänteislukutauluja. Näissä tyyppiä $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$ jne. oleville luvuille annettiin päättyviä seksagesimaaliapproksimaatioita.

Babylonialaiset kehittivät lisäksi taitavia algoritmisia menetelmiä. Esim. neliöjuuri $\sqrt{a}$ saatettiin laskea approksimaation

$$\sqrt{a} = \sqrt{n^2 + b} \approx n + \frac{b}{2n} = \frac{1}{2}\left(n + \frac{a}{n}\right)$$

avulla; tässä n^2 on suurin a:ta pienempi kokonaisluvun neliö. Approksimaatio on sama kuin se, joka saadaan, kun neliöjuurifunktion potenssisarjasta otetaan kaksi ensimmäistä termiä. Toisessa menetelmässä lähdetään approksimaatiosta a_1; muodostetaan peräkkäin

$$b_1 = \frac{a}{a_1}, \quad a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = \frac{a}{a_2} \quad \text{jne.}$$

Näin saadaan muutaman askelen jälkeen sangen tarkka $\sqrt{a}$:n likiarvo. Ei ole kuitenkaan olemassa todisteita siitä, että babylonialaiset olisivat ajatelleet prosessiin sisältyvää päättymättömän suppenevan lukujonon ideaa.

Jo noin 4000 vuotta vanhat babylonialaiset tekstit osoittavat, että – toisin kuin egyptiläiset – babylonialaiset tunsivat toisen asteen yhtälön ratkaisumenetelmän. Se ei kylläkään esiinny yleispätevänä ratkaisukaavana, vaan numeeristen esimerkkien muodossa, mutta esimerkit ovat selvästi tunnistettavissa yleisen metodin opetusvälineiksi. Seuraavassa käytetään 60-järjestelmän numeroita siten, että paikkaerotin on pilkku ja desimaalierotin puolipiste. Eräässä tulkitussa savitaulussa kysytään neliön sivua, jos ala vähennettynä sivulla on 14,30 (eli $14 \cdot 60 + 30 = 870$) Tehtävän ratkaisu on seuraava:

> Ota puolet yhdestä, eli 0;30 ja kerro 0;30 0;30:llä, joka on 0;15; lisää tämä 14,30:een, joka on 14,30;15. Tämä on 29;30:n neliö. Lisää 0;30 29;30:een, ja tulos on 30 eli neliön sivu.

Selvästi kyseessä on yhtälön $x^2 - px = q$ ratkaisukaavan

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$$

käyttö, kun $p = 1$ ja $q = 870$. Huomattakoon myös, että alan ja sivunpituuden erilaisiin mittayksikköihin ei kiinnitetä huomiota, vaan kummankin lukuarvot esiintyvät samassa yhtälössä. – Koska negatiiviset luvut eivät olleet käytössä, antiikin aikana toisen asteen yhtälöt saattoivat olla vain muotoa $x^2 = px + q$, $x^2 + px = q$ ja $x^2 + q = px$, missä p ja q ovat positiivisia.

Babylonialaista yhtälönratkaisua vielä, nykysymbolein ja merkinnöin: määritä x, jolle $x^2 + 6x = 16$. Aseta $y = x + 6$. Ratkaistavana on yhtälöryhmä

$$\begin{cases} y - x = 6 \\ \quad xy = 16. \end{cases}$$

Jos $y = a + 3$ ja $x = a - 3$, niin jälkimmäinen yhtälö on $a^2 - 9 = 16$, josta $a = 5$, $x = 2$. – Tyyppiä $7x^2 + 6x = 1$ olevaa yhtälöä ei sievennetty nykytapaan jakamalla x^2:n kertoimella, vaan kertomalla koko yhtälö 7:llä: yhtälöksi saadaan $(7x)^2 + 6(7x) = 7$ eli $y^2 + 6y = 7$, josta $y = 1$, $x = \dfrac{1}{7}$.

Babylonialaisessa matematiikassa esiintyy jopa korkeamman asteen polynomiyhtälöihin johtavia tehtäviä; sellaisia ratkaistiin erikoistapauksissa käyttämällä apuna mm. $n^3 + n^2$-taulukkoja. Taulukoiden avulla ratkaistiin myös korkolaskujen yhteydessä vastaan tulevia eksponenttiyhtälöitä.

Babylonialaisten matematiikka oli (kuten muidenkin muinaiskulttuurien matematiikka) voittopuolisesti algebrallis-algoritmista. Geometriasta lienee tunnettu ainakin Pythagoraan lause. Eräässä savitauluista puretussa tehtävässä kysytään, miten kauas 30 yksikköä pitkän sauvan alapää joutuu pystysuorasta seinästä, kun yläpäätä lasketaan 6 yksikköä. Pythagoraan lauseen mukainen ratkaisu on $\sqrt{30^2 - (30-6)^2} = \sqrt{324} = 18$.

Omalaatuisin todiste Pythagoraan lauseen tunnettuudesta Babyloniassa on luonteeltaan aritmeettinen, nimittäin paljon tutkittu ja monien selitysten kohteena ollut savitaulu, joka tunnetaan nimellä *Plimpton 322*. Siinä on seksagesimaalilukuja

$1;59,0,15$	$1,59$	$2,49$
$1;56,56,58,14,50,6,15$	$56,7$	$1,20,25$
$1;55,7,41,15,33,45$	$1,16,41$	$1,50,49$
$1;53,10,29,32,52,16$	$3,31,49$	$5,9,1$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Yksi taulun selitys on, että siinä olevat luvut olisivat lukuja $(\frac{c^2}{b^2}, a, c)$, missä $a^2 + b^2 = c^2$. Tämän ehdon toteuttavat positiivisten kokonaislukujen kolmikot (a, b, c) ovat ns. *Pythagoraan lukuja*. On tunnettua, että jos kolmikon luvuilla ei ole yhteisiä tekijöitä, niin luvuista a ja b tasan toinen on parillinen; jos se on b, niin on olemassa yhteistekijättömät kokonaisluvut p ja q, siten että $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$ ja $c = p^2 + q^2$. Plimpton-taulun luvut olisivat alku taulukolle, jossa ovat kaikki tällaiset, arvoilla $p \leq 125$ ja $1 < \frac{p}{q} < 1 + \sqrt{2}$ saatavat luvut järjestettynä suureen $\dfrac{p^2 + q^2}{2pq}$ mukaan. – Plimpton 322:n merkityksestä keskustellaan jatkuvasti, ja erilaisia tulkintoja on useita.

Babylonialaisten tekstien tiedot ympyränmitannosta osoittavat, että ympyrän kehän ja halkaisijan suhteelle käytettiin tavallisimmin arvoa 3, mutta eräistä teksteistä löytyy parempi likiarvo $3\frac{1}{8}$ (säännöllisen kuusikulmion piirin suhde ympäri piirretyn ympyrän kehään on $0;57,36$.)

Myös Vanhassa testamentissa esiintyy ”π:n arvo 3”, kuten Ensimmäinen Kuningasten Kirja (7:23) kertoo:

> Hän [Salomo] teki myös meren, valetun, kymmentä kyynärää leveän reunasta reunaan, ympäriinsä pyöreän – – ja kolmenkymmenen kyynärän pituinen mittanuora ulottui sen ympäri.

Katkaistun pyramidin tilavuudelle löytyy babylonialaisista savitauluista sekä vääriä että oikeita laskutapoja. Yleisiä matemaattisia teoreemoja eivät babylonialaiset sen paremmin kuin egyptiläisetkään tietojemme mukaan tunteneet eivätkä todistaneet: heidän matematiikkansa oli (kuten ”insinöörimatematiikka” nykypäivinäkin) kokoelma toimintaohjeita, ei niiden perusteluja.

4 Antiikin Kreikan matematiikkaa

Matematiikan voidaan katsoa muodostuneen omaksi itsenäiseksi tieteekseen kreikkalaisen kulttuurin piirissä noin puoli vuosituhatta ennen ajanlaskumme alkua. Muutos esikreikkalaisesta antiikista kreikkalaiseen matematiikkaan on hämmästyttävä, eikä sille ole aivan uskottavaa selitystä löytynyt.

Kreikkalaisen matematiikan ajanjakso ulottuu noin vuoteen 400 jKr. asti. Se voidaan karkeasti jakaa noin vuonna 300 eKr. päättyneeseen *klassiseen kauteen* ja sitä seuranneeseen *hellenistiseen kauteen.* Kun puhutaan antiikin Kreikan matematiikasta, ei maantieteellisesti rajoituta nykyiseen tai silloiseen Kreikkaan, vaan kysymys on paljon laajemmasta alueesta, joka käsitti myös Etelä-Italian, Sisilian, Vähän-Aasian ja Egyptin. Kaikki huomattavat matemaatikot eivät ilmeisesti kansallisuudeltaankaan olleet kreikkalaisia.

Kreikkalaista matematiikkaa ei juuri voida tutkia alkuperäislähteistä, toisin kuin esimerkiksi babylonialaista matematiikkaa. Tekstit ovat kopioita ja kopioiden kopioita. Monet ovat myös kulkeneet kiertotien: ne on aikanaan käännetty kreikasta arabiaksi ja sitten arabiasta länsimaisille kielille.

Tiedot kreikkalaisen matematiikan varhaiskehityksestä perustuvat etupäässä lähes tuhat vuotta myöhemmin kirjoittaneen *Prokluksen* (410[?]–485 jKr.) historiaan. Huomattavasti varhaisemman *Eudemuksen* (n. 320 eKr.) aritmetiikan ja geometrian historioista on säilynyt vain muutama myöhempien kirjoittajien lainaama katkelma. Myöhempienkään kreikkalaisten matemaatikkojen alkuperäisiä käsikirjoituksia ei ole säilynyt – kreikkalaisten kirjoitusmateriaali oli papyrus. Luultavasti monien tuntemiemme kreikkalaisten suurenmoisten matemaattisten saavutusten lisäksi paljon hienoa matematiikkaa on aikojen saatossa tuhoutunutkin. Hyvin suuri osa varhempien vuosisatojen kreikkalaisesta matematiikasta on koottu *Eukleideen* monumentaaliseen teokseen *Alkeet*, joka on kirjoitettu noin 300 eKr.

Kreikan perustavaa laatua oleva merkitys matematiikan historialle näkyy vaikkapa lukuisien matemaattisten termien kreikkalaisesta alkuperästä. Tällaisia ovat esimerkiksi *trigonometria, logaritmi, aritmetiikka, geometria, matematiikka, teoreema, tetraedri, probleema, ellipsi, paraabeli, hyperbeli, aksiooma, analyysi. . .* Luetteloa voi jatkaa lähes rajatta. – Kaikki matematiikan kreikkaan perustuvat termit eivät toki ole antiikin ajalta, mutta matematiikan kieleksi miellettyä kreikkaa on käytetty uudissanoja luotaessa. Matematiikan kehityksen kannalta olennainen keksintö, kuvion osien nimeäminen kirjaimin niin, että kuviosta puhuminen ja kirjoittaminen yksinkertaistuu, on sekin kreikkalainen innovaatio.

4.1 Kreikkalaisten laskento

Kauppaa käyvät kreikkalaiset kaupunkivaltiot tarvitsivat käytännön aritmetiikkaa. Erotukseksi lukujen ominaisuuksia tutkivasta ”oikeasta” *aritmetiikasta*, nykytermein siis *lukuteoriasta*, käytännön laskemista kutsuttiin *logistiikaksi*.

Kreikkalaiset käyttivät lukujen merkinnässä kahta eri järjestelmää. Vanhemmassa, *attikalaisessa* eli *herodiaanisessa* järjestelmässä esitystapa oli samanlainen kuin egyptiläisillä tai roomalaisilla, ts. ykkösellä, kymmenellä, sadalla, tuhannella ja kymmenellätuhannella oli oma symbolinsa kullakin. $\mathsf{I} = 1$, $\Gamma = 5$, ei iso gamma vaan vanha iso pi kuten pentagoni, $\Delta = 10$, $\mathsf{H} = 100$ – vrt. hehtaari – $\mathsf{X} = 1000$ – vrt. kilo – $\mathsf{M} = 10000$). Myöhemmässä, *joonialaisessa* järjestelmässä kutakin luvuista 1, 2, . . ., 9, 10, 20, . . ., 90, 100, 200, . . ., 900 vastasi aakkoston kirjain ($1 = \mathsf{A}$, $2 = \mathsf{B}$, $3 = \Gamma$ jne., myöhemmin – pienaakkoset ovat syntyneet paljon myöhemmin kuin suuraakkoset – $1 = \alpha$ jne.), lukuja 1000, . . ., 9000 merkittiin vastaavilla ykkösten symboleilla, joita edelsi pilkku, ja suurempia lukuja käyttämällä kerrointa $\mathsf{M} = 10^4$. Jotta luvut eivät sekoittuisi sanoihin, lukuja tarkoittavien kirjainten tai kirjainyhdistelmien yläpuolelle vedettiin vaakasuora viiva. Tavallisten kreikan aakkosten lisäksi numeromerkinnöissä käytettiin muutamaa sittemmin aakkoskäytöstä poistunutta kirjainta. – Vaikka kreikan kirjaimisto on paljolti lainaa foinikialaisilta, foneettisen kirjoitustavan keksijöiltä, niin keksintö käyttää kirjaimia numeroina on puhtaasti kreikkalainen.

Α = 1	Ι = 10	Ρ = 100
Β = 2	Κ = 20	Σ = 200
Γ = 3	Λ = 30	Τ = 300
Δ = 4	Μ = 40	Υ = 400
Ε = 5	Ν = 50	Φ = 500
Ϝ [ϛ] = 6	Ξ = 60	Χ = 600
Ζ = 7	Ο = 70	Ψ = 700
Η = 8	Π = 80	Ω = 800
Θ = 9	Ϙ = 90	Ͳ [ϡ] = 900

Joonialaiset numeromerkit
”Oudot” kirjaimet ovat *digamma* (6), *koppa* (90) ja *sampi* (900).

Joonialainen numeromerkintä säilyi tieteellisessä käytössä länsimaissa vielä pitkään keskiajan lopulle, kauan nykyisen intialais-arabialaisen lukumerkinnän käyttööntulon jälkeenkin. – Joonialaiseen lukumerkintään ei varsinaisesti kuulunut murtolukuja; yksikkömurtoluvuista käytettiin kuitenkin merkintää, jossa nimittäjää esittävään symboliin liitettiin murtoluvun merkki, ja myöhemmin tulivat käyttöön seksagesimaalimurtoluvut (minuutit ja sekunnit).

4.2 Thales – kreikkalaisen matematiikan alku

Perimätiedon mukaan ensimmäinen nimeltä tunnettu kreikkalainen matemaatikko (ja matemaatikko yleensäkin) oli Vähän-Aasian merkittävimmästä kreikkalaiskaupungista Miletoksesta kotoisin ollut kauppias *Thales* (624[?]–547[?] eKr.). Thaleen, joka oli yksi Kreikan perinteen seitsemästä viisaasta (näihin kuului myös Ateenan kuuluisa lainlaatija *Solon*), kerrottiin saaneen oppinsa Egyptistä. Hänen sanotaan esittäneen tai todistaneen seuraavat viisi geometrian teoreemaa. – Sanan *teoreema*, samoin kuin *teorian* ja *teatterin* pohjana on kreikan katsomista tai havaitsemista tarkoittava verbi $\vartheta\varepsilon\omega\rho\varepsilon\omega$.

1. Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret.
2. Ristikulmat ovat yhtä suuret.
3. Kaksi kolmiota, joilla on yhtä suuret kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu, ovat yhtenevät.
4. Ympyrän jokainen halkaisija jakaa ympyrän kahteen yhtä suureen osaan.
5. Puoliympyrän kaaren sisältämä kulma on suora.

Näistä erityisesti viimeinen kulkee edelleen nimellä *Thaleen lause*.

On huomattava perustavanlaatuinen ero Thaleen ja babylonialaisen tai egyptiläisen geometrian välillä: Thales muotoili yleispäteviä kuvioiden ominaisuuksia koskevia lauseita, jälkimmäiset esittivät laskennollisia ratkaisuja tiettyihin eksplisiittisesti muotoiltuihin probleemoihin. Epäselvempää on, mitä tarkoittaa, että Thales todisti nämä – ilmeisesti hän esitti väittämien tueksi rationaalisia perusteluja.

4.3 Pythagoras ja pythagoralainen matematiikka

Noin puoli vuosisataa Thalesta nuorempi on Vähän-Aasian rannikon Samos-saarelta kotoisin oleva *Pythagoras* (572[?]–497 eKr.), niin ikään puoleksi tarunomainen hahmo. Pythagoraan Etelä-Italian Krotoniin (nykyisin Crotone) noin 530 eKr. perustamalla matemaattis-mystisellä koulukunnalla on ollut suuri merkitys matematiikan kehitykselle itsenäiseksi tieteenalaksi. Sana "matematiikka", $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$ johdoksineen, lienee pythagoralaisten käyttöön ottama, ja sen alkuperäinen merkitys on 'se, mikä tulee tietää'. (Sanan etymologisia sukulaisia ovat sanskriitin *man* 'ajatella', latinan *mens* 'mieli, sielu' tai saksan *munter* 'iloinen'.) Pythagoralaisten keskuudessa sanotaan tulleen käyttöön opetussuunnitelman, jossa *geometrialla*, *aritmetiikalla*, *astronomialla* ja *musiikilla*, myöhemmin latinankielisellä nimellä *quadrivium* tunnetulla yhdistelmällä, oli keskeinen asema. (*Triviaali*-sana muuten johtuu seitsemän vapaan taiteen oppijakson alkuosan humanistisemmista kolmesta aineesta, *grammatiikasta*, *retoriikasta* ja *logiikasta*, jotka muodostivat *triviumin*.)

Pythagoralaisten veljeskunnan symboli oli viisikanta eli pentagrammi, säännöllisen viisikulmion lävistäjien muodostama viisisakarainen tähti, jonka keskustan muodostaa säännöllinen viisikulmio. Symbolin ja kuvioon sisältyvän matematiikan yhteydestä janojen yhteismitattomuuden keksimiseen on spekuloitu.

Pythagoralaiset eivät juuri jättäneet kirjallisia lähteitä – veljeskunta siirsi tietoa suullisesti ja pyrki salaamaan oppinsa ulkopuolisilta. Turvallisempaa kuin liittää asioita suoraan Pythagoraaseen itseensä on sanoa niiden liittyvän pythagoralaisiin.

Keskeistä pythagoralaisten matematiikassa ja koko filosofiassa oli (luonnollinen) luku. Tässä mielessä Pythagoraan koulukuntaa voidaan pitää babylonialaisen aritmeettis-algebrallisen tradition jatkajana. Aritmetiikka erotettuna logistiikasta on pythagoralaista lähtöä. Pythagoralaisilta periytyvät paitsi lukumystiikkaan liittyvät käsitteet myös useat yhä käytössä olevat lukujen luokittelut. Tällainen on mm. luokittelu *parilliset* ja *parittomat* luvut. Huomattakoon, että luvun parillisuus ja parittomuus ei kreikkalaisten lukumerkintää käytettäessä ole ollenkaan niin heti ilmeinen asia kuin nykyisessä kirjoitustavassa. Yhtä ja toisinaan myös kahta ei pidetty samassa mielessä lukuina kuin nyt. Luokitusta tarkennettiin mm. luvun tekijöiden parillisuuteen pohjautuvalla jaottelulla pariton–pariton, pariton–parillinen, parillinen–parillinen. Luokittelu *alkuluku – yhdistetty luku* on myös pythagoralainen. Alkulukuja kutsuttiin *lineaarisiksi luvuiksi*, yhdistettyjä lukuja *tasoluvuiksi*.

Lukujen jako *täydellisiksi, vajaiksi* ja *abundanteiksi* eli *runsaiksi* on myös vanha, joskaan sitä ei pystytä suoraan kytkemään pythagoralaisiin. Luku on vajaa, jos sen tekijöiden (1 mukana, luku itse ei) summa on pienempi kuin itse luku ($1+2+4<8$), täydellinen, jos summa on sama kuin luku ($1+2+3=6$) ja runsas, jos summa on suurempi kuin luku ($1+2+4+6>12$). Antiikin aikana tunnettiin neljä täydellistä lukua: 6, 28, 496 ja 8128. Lisäksi tiedettiin, että jos 2^p-1 on alkuluku, niin $2^{p-1}(2^p-1)$ on täydellinen luku. – Euler todisti 1700-luvulla, että kaikki parilliset täydelliset luvut ovat tätä muotoa. Muotoa 2^p-1 olevat alkuluvut ovat ns. *Mersennen alkulukuja*; usein uusien ja entistä tehokkaampien tietokoneiden testiajoissa saavutetut "suurin tunnettu alkuluku" -muotoiset ennätykset ovat poikkeuksetta koskeneet Mersennen alkulukuja.

Täydellisen luvun käsitteen sukulainen on *ystävällisten lukujen* käsite: n ja m ovat ystävällisiä, jos n on m:n tekijöiden summa ja m n:n tekijöiden summa. Pari $m=284$, $n=220$ on esimerkki tällaisista luvuista.

Tyypillinen pythagoralaisten tuote oli *kuviolukujen* teoria. Kuviolukujen pohjana on ajatus lukujen samastamisesta pisteistöihin ja ilmeisesti konkreettiset laskukivien konfiguraatioilla tehdyt kokeilut. Kuviolukuja ovat kolmioluvut 1, 3, 6, ...,

```
               *
         *     * *
   *     * *   * * *     ...
```

neliöluvut 1, 4, 9, ...,

```
               * * *
         * *   * * *
   *     * *   * * *     ...
```

viisikulmioluvut 1, 5, 12, ...

```
                                   *
                 *           *           *
   *   *     *   *     *           *          *     ...
       *   *         *           *   *
                             *   *   *
```

ja *pitkänomaiset luvut* 2, 6, 12, 20, ... Yleisesti ensimmäinen n-kulmioluku on 1 ja toinen on n. Jos k:nnetta lukua $m(n,k)$ edustaa n-kulmio ja siinä olevat $m(n,k)$ pistettä, $k+1$. saadaan jatkamalla kahta n-kulmion sivua $\frac{1}{k}$-osalla pituudestaan, täydentämällä kuvio n-

kulmioksi ja lisäämällä uusille sivuille pisteitä niin, että kuvion reunan joka sivulla on sama määrä pisteitä. Prosessissa lisätyt pisteet muodostavat *gnomonin*, kuvion, joka edustaa kahden peräkkäisen kuvioluvun erotusta. (Antiikin luonnontieteessä gnomon tavataan eri yhteyksissä. Se voi olla aurinkokellossa varjon synnyttävä sauva, puusepän suorakulmatyökalu tai geometriassa se osa suunnikkaasta, joka jää yli, kun suunnikkaasta poistetaan pienempi suunnikkaan muotoinen kulma.) Kuvioita, erityisesti gnomoneja tarkastelemalla näkee helposti monia lukurelaatioita, mm.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

tai

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = n(n + 1)$$

(kaksi n:ttä kolmiolukua muodostavat pitkänomaisen luvun $n(n+1)$) tai että neliöluku on kahden peräkkäisen kolmioluvun summa.

Käsitteet *aritmeettinen*, *geometrinen* ja *harmoninen keskiarvo* ovat peräisin pythagoralaisilta. Näihin johduttiin ilmeisesti musiikkiin liittyvien numerosuhteiden tarkastelujen kautta, pythagoralaiset kun havaitsivat, että jännitettyjen kielten äänenkorkeudet ja kielten pituudet olivat tekemisissä toistensa kanssa. Sen, että b on a:n ja c:n aritmeettinen, geometrinen tai harmoninen keskiarvo, voi karakterisoida yhtälöillä

$$\frac{c-b}{b-a} = \frac{a}{a}, \quad \frac{c-b}{b-a} = \frac{b}{a}, \quad \frac{c-b}{b-a} = \frac{c}{a}.$$

Oktaavin päässä toisistaan olevia säveliä vastaavien kielenpituuksien harmoninen keskiarvo antaa sävelen, joka on kvinttiä korkeampi kuin alkuperäisistä sävelistä matalampi. Sävelharmonia teki lukukolmikon (6, 8, 12) sinänsä harmoniseksi; seurauksena oli esim., että kuutio, jossa on 6 sivutahkoa, 8 kärkeä ja 12 särmää, oli harmoninen kappale.

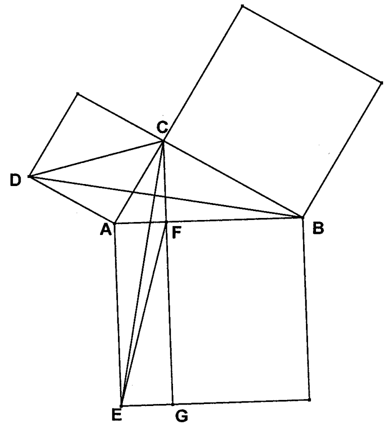
Pythagoralaiset määrittelivät a:lle ja c:lle kaikkiaan 10 eri keskiarvoa varioimalla a:n, b:n ja c:n paikkoja ylläolevan kaltaisissa kaavoissa.

Geometriassa riidattomimmin pythagoralaisiin liitettävissä oleva teoreema on kolmion kulmien summaa koskeva lause.

Pythagoraan lauseen alkuperä kreikkalaisessa geometriassa on epäselvä. Olettamusta, jonka mukaan lause tosiaan olisi peräisin itse Pythagoraalta, ei ainakaan voi helposti todistaa vääräksi. Yksinkertainen ja mahdollisesti alkuperäinen lauseen todistus hyödyntää yhdenmuotoisia kolmioita, jotka synnyttää hypotenuusaa vastaan piirretty korkeus: jos x ja y ovat kateettien a ja b projektiot hypotenuusalla c, niin

$$c = x + y = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c},$$

josta $c^2 = a^2 + b^2$. Tämä todistus perustuu kuitenkin suhdeoppiin, joka osoittautui ongelmalliseksi. Eukleides todistaakin Pythagoraan lauseen älykkään apupiirroksen avulla,



Eukleideen todistus Pythagoraan lauseelle

joka palauttaa kysymyksen tietoon, jonka mukaan samakantaisilla ja samakorkeuksisilla kolmioilla on sama ala.

Pythagoraan on arveltu päätyneen lauseeseensa havaittuaan, että kolmio, jonka sivut ovat 5, 4 ja 3 on suorakulmainen; todistus on voinut sitten perustua yhdenmuotoisiin suorakulmaisiin kolmioihin tai neliön erilaisiin paloitteluihin neljäksi suorakulmaiseksi kolmioksi ja neliöiksi.

4.4 Yhteismitattomuus

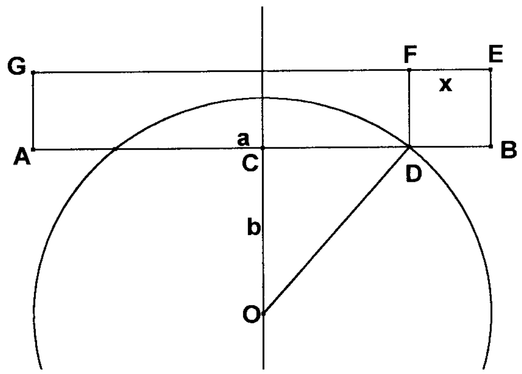
Pythagoralaisten kokonaislukuihin perustuva matematiikan järjestelmä johti ymmärrettävästi geometriassa yhteismitallisuuteen perustuvaan suhdeoppiin: geometrisia suureita yritettiin verrata toisiinsa niiden mittalukujen kautta. Pythagoralaisten järjestelmä koki melkoisen kriisin, kun (ilmeisesti viidennellä vuosisadalla ennen ajanlaskumme alkua kuitenkin Pythagoraan elinaikaa myöhemmin – vuosilukua 430 eKr. on esitetty; keksijäksi perimätieto kertoo *Hippasus Metapontolaisen*) havaittiin, että monet yksinkertaiset janaparit, kuten neliön sivu ja lävistäjä tai jatkuvaan suhteeseen jaetun janan osat, eivät voi olla yhteismitallisia.

Tunnettu jaollisuuteen perustuva epäsuora todistus luvun $\sqrt{2}$ irrationaalisuudelle (Jos $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ ja $\dfrac{p}{q}$ on supistettu murtoluku, niin $p^2 = 2q^2$, joten p^2 ja siis p on parillinen, jolloin p^2 ja siis $2q^2$ on jaollinen 4:llä, ja q^2 siis parillinen eli q parillinen, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $\dfrac{p}{q}$ on supistettu.) on mahdollisesti ollut tuttu pythagoralaisille; ainakin Eukleides käyttää sitä. Todistus yhdistettynä Pythagoraan lauseeseen kertoo heti, että neliön sivu ja lävistäjä eivät voi olla saman janan monikertoja: ne eivät siis ole yhteismitallisia.

Toinen arveltu tie yhteismitattomien janojen olemassaolon toteamiseen liittyy pythagoralaisille tärkeään viisikantakuvioon. Jos viisikulmion sivu on a ja lävistäjä d, on viisikantaan liittyviä tasakylkisiä kolmioita tarkastelemalla melko helppo johtua tulokseen, jonka mukaan $\dfrac{d}{a} = \dfrac{a}{d-a}$. Viisikulmion sivu on tämän mukaan pitempi niistä osista, jotka saadaan, kun lävistäjä jaetaan ns. jatkuvaan suhteeseen. Jatkuvaan suhteeseen perustuvaa jakoa voi jatkaa: jos sivusta erotetaan lävistäjän jaon pienempi osa $d-a$, jäljelle jääneen osan $a-(d-a) = 2a-d$ suhde $d-a$:han on sama kuin $d-a$:n suhde a:han jne. Jos nyt a ja d olisivat janan m monikertoja, olisivat sitä $d-a$, $2a-d$ jne., mutta jakoja toistettaessa jako-osat pienenevät, ja lopulta ne alittavat m:n, ja tullaan taas ristiriitaan. – Edellisissä päättelyissä on molemmissa esiintynyt *epäsuora todistus*. Se on yksi kreikkalaisen matematiikan ominaispiirteitä.

Yhteismitattomuuden havaitseminen ja tästä seuraava huomio, jonka mukaan pelkillä lukusuhteilla ei voida ilmaista geometrisia relaatioita, johti matematiikan painopisteen muuttumiseen geometrian suuntaan: aikaisemmin laskemalla ratkaistut tehtävät oli voitava ratkaista synteettisen geometrian keinoin, samaa ulottuvuutta olevien kuvioiden avulla. – Huomattakoon, että kutsumme yhä luvun toista ja kolmatta potenssia sen *neliöksi* ja *kuutioksi*.

Mm. toisen asteen yhtälöitä vastaavia tehtäviä ei voinut ratkaista babylonialaisten tapaan laskualgoritmilla, vaan laskualgoritmia vastaavalla geometrisella konstruktiolla. Tällainen on ns. *pinta-alan sovittaminen*. Tehtävässä konstruoidaan suorakaide, jonka kanta on annetun janan pituinen ja jonka ala ylittää tai alittaa annetun neliön alan neliöllä, jonka sivu on suorakaiteen korkeus. Algebrallisesti tehtävä on $ax \pm x^2 = b^2$. Yksinkertainen geometrinen konstruktio tehtävän ratkaisemiseksi tapauksessa, jossa suorakaiteen ala ylittää neliön alan: piirretään $AB = a$. Olkoon C AB:n keskipiste. Erotetaan AB:n keskinormaalilta $CO = b$. Piirretään O-keskinen $\frac{a}{2}$-säteinen ympyrä, joka leikkaa puolisäteen CB pisteessä D. Nyt $DB = \dfrac{a}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - b^2} = x$, sillä jos piirretään neliö $DBEF$, niin suorakaiteen $ADFG$ ala on



Toisen asteen yhtälön geometrinen ratkaisu

$$(a-x)x = ax - x^2 = \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}\right)\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}\right) = b^2.$$

Suorakaiteen $ABEG$ ala on siis tunnetun neliön ala b^2 lisättynä neliöllä, jonka sivu on suorakaiteen toinen sivu. Voidaan huomata, että itse asiassa on ratkaistu tehtävä ”katkaise jana niin, että sen osat muodostavat suorakaiteen, jonka ala on tunnettu". Tällaisia tehtäviä olivat monet babylonialaisen matematiikan "toisen asteen yhtälöt". – Vastaava Pythagoraan lauseeseen perustuva konstruktio tilanteeseen, jossa suorakaiteen ala on tunnetun neliön ala vähennettynä neliöllä, on helppo tehdä.

Tieteen historiaa sysäyksittäin etenevänä pitävä koulukunta nimittää yhteismitattomuuden keksimistä matematiikan ensimmäiseksi suureksi kriisiksi.

4.5 Antiikin kolme suurta ongelmaa

Vanhin ilmeisesti jokseenkin alkuperäisen kaltaisena jälkimaailmalle säilynyt kreikkalainen matemaattinen teksti on Khiokselta kotoisin olleen *Hippokrateen* (n. 470 – n. 410 eKr.) (Hippokrates Khioslainen on eri henkilö kuin lääketieteen isänä tunnettu Kosin Hippokrates) tasakylkiseen suorakulmaiseen kolmioon liittyvien ympyränkaarikaksikulmioiden eli *Hippokrateen kuunsirppien* pinta-alan määritys (noin 430 eKr.).

Puoliympyröiden, joiden halkaisijoina ovat (minkä hyvänsä) suorakulmaisen kolmion hypotenuusa c ja kateetit a ja b, alat ovat muotoa kc^2, ka^2 ja kb^2, missä k on verrannollisuuskerroin (itse asiassa $k = \frac{1}{2}\pi$). Jos ison puoliympyrän ulkopuolelle jäävien pienempien puoliympyröiden osien ala on X, niin koko kuvion ala voidaan lausua kahdella tavalla: $X + kc^2 = ka^2 + kb^2 + \frac{1}{2}ab$. Pythagoraan lauseesta seuraa heti, että $X = \frac{1}{2}ab$ eli sama kuin suorakulmaisen kolmion ala.

Hippokrateen sanotaan yrittäneen soveltaa samaa ideaa ympyrän pinta-alan määrittämiseen seuraavasti: jos säännöllisen kuusikulmion, jonka sivu on r ja ala Y, ympäri piirretään ympyrä ja kunkin kuusikulmion sivu halkaisijana piirretään puoliympyrät, saadaan piparkakun muotoinen alue, jonka ala on toisaalta $Y + 6k\left(\frac{r}{2}\right)^2$, toisaalta $kr^2 + 6X$, missä X on ison ympyrän ja pienemmän puoliympyrän väliin jäävän alueen ala. Jos X tunnetaan, verrannollisuuskerroin k eli ympyrän ala voidaan määrittää. Ongelmaksi muodostuu se, että X ei ole samoin helposti määritettävissä kuin vastaavassa suorakulmaisen kolmion tapauksessa. – Trigonometrisin tarkasteluin voidaan osoittaa, että ympyränkaarikaksikulmion neliöinti onnistuu silloin ja vain silloin, kun kaksikulmiota rajoittavien kaarien keskuskulmien suhde on jokin luvuista 2, 3, $\frac{3}{2}$, 5, $\frac{5}{3}$. Ensimmäinen, joka tämän todisti, oli Turun Akatemian matematiikan professori *Martin Wallenius* (1731–73).

Ympyrän pinta-alan määritys eli *ympyrän neliöimisen* ongelma on yksi antiikin *kolmesta suuresta matemaattisesta ongelmasta*, joiden tutkimus alkaa viidenneltä vuosisadalta eKr. Muut kaksi ovat *kulman kolmijako* ja *kuution kahdentaminen*. Kaikissa tapauksissa ratkaisu pyrittiin saamaan puhtaasti geometrisin konstruktiomenetelmin, harpilla ja viivoittimella eli ns. euklidisilla työkaluilla. Vasta 1800-luvulla kyettiin lopullisesti osoittamaan, että mikään näistä konstruktioista ei onnistu. Ympyrän neliöinnin mahdottomuus palautuu siihen, että π on transkendenttiluku (minkä todisti saksalainen *Ferdinand Lindemann* (1852–1939) v. 1882), ja kulman kolmijaon sekä kuution kahdentamisen mahdottomuus siihen, että harppi ja viivoitinkonstruktioin voidaan tuottaa vain pisteitä, joiden koordinaatit saadaan lähtöpisteiden koordinaateista rationaalisin laskutoimituksin ja neliöjuuren otoin, kun taas mainitut ongelmat johtavat yleensä kolmannen asteen yhtälöihin, joille 1800-

luvun alkupuolella kehittyneiden keinojen mukaan voidaan osoittaa, että tällainen ratkaisu ei yleensä ole mahdollinen. Täsmällisen todistuksen kuution kahdennustehtävän ja kulman kolmijaon ratkeamattomuudelle harpilla ja viivoittimella antoi ranskalainen *Pierre Wantzell* (1814–48) vuonna 1837. – Kolmijako-ongelma kiehtoo silti edelleen, ja esim. yliopistojen matematiikan laitoksiin saapuu yhä ehdotuksia ongelman ratkaisemiseksi.

Antiikin kolme suurta ongelmaa ovat tyypillisiä puhtaan matematiikan ongelmia: niillä ei oikeastaan ole mitään tekemistä käytännön tarpeiden kanssa. Vaikka 2200 vuoden työ lopulta osoitti, että kaikki kolme ongelmaa ovat alkuperäisessä mielessä ratkeamattomia, niin ratkaisuyritysten vaatimien lisäapuneuvojen kehittely on monissa yhteyksissä vienyt matematiikan kehitystä eteenpäin: jo antiikissa esim. *Menaikhmos* (noin 350 eKr.) johtui kuutiota kahdentaessaan *kartioleikkauskäyriin* ja *Hippias* (noin 425 eKr.) kulman kolmijako-ongelman yhteydessä erääseen *transkendenttikäyrään*.

Hippiaan käyrän, *trisectrixin* eli *quadratrixin*, voi ajatella syntyvän tasaisella kulmanopeudella pyörivän ympyrän säteen ja tasaisella nopeudella liikkuvan, suuntansa säilyttävän janan leikkauspisteen urana. Ajatellaan, että ympyrän keskipiste on origo ja säde kääntyy vastapäivään niin, että sen toinen päätepiste lähtee pisteestä $A = (1, 0)$ ja päätyy pisteeseen $B = (0, 1)$. Saman ajan kuluessa x-akselin suuntainen jana puolestaan kohoaa niin, että sen toinen päätepiste siirtyy origosta O pisteeseen B. Säteen ja janan leikkauspiste piirtää trisectrix-käyrän. Nykymerkinnöin käyrän yhtälöksi saataisiin

$$y = x \tan \frac{\pi y}{2}.$$

Jos trisectrix on käytettävissä, kulman kolmijako (tai mihin tahansa suhteeseen jako) on yksinkertaista. Sijoitetaan kulma, jonka suuruus on α niin, että sen kärki on origossa ja oikea kylki yhtyy x-akseliin. Jos vasemman kyljen ja trisectrixin leikkauspiste on $P_0 = (x_0, y_0)$, niin suora $y = \frac{1}{3}y_0$ leikkaa trisectrixin pisteessä P_1 niin, että $\angle AOP_1 = \frac{1}{3}\alpha$. Koska

$$\lim_{y \to 0} \frac{y}{\tan \frac{\pi y}{2}} = \frac{2}{\pi},$$

trisectrix leikkaa x-akselin pisteessä, jonka etäisyys origosta on 1-säteisen ympyrän kehän neljänneksen käänteisluku. Tätä tietoa voi käyttää ympyrän suuruisen neliön konstruoimiseen. – Viimeksi mainittua havaintoa ei tehnyt Hippias, vaan vasta myöhemmin *Dinostratos*, Menaikhmoksen veli.

Kolmijako-ongelmaan esitettiin myös mm. ns. *neusis*-ratkaisuja. Niissä pyrittiin määrämittainen jana ”liu'uttamaan” asemaan, jota ei voi määrittää harpilla ja viivoittimella. Arkhimedes esitti seuraavan yksinkertaisen kolmijakokonstruktion: Olkoon annettu kulma AOB, $AO = OB = r$. Piirretään O-keskinen r-säteinen ympyrä ja piirretään A:n kautta suora, joka leikkaa ympyrän myös pisteessä D ja suoran BO pisteessä C; asetetaan suora vielä niin, että $CD = r$ (tämä on *neusis*). Tasakylkisistä kolmioista DCO ja DOA nähdään heti, että $\angle AOB = 3 \cdot \angle ACB$. – Ei ole tarkkaa tietoa siitä, miksi geometrian ainoiksi sallituiksi työkaluiksi kiteytyivät juuri harppi ja viivain. Antiikin aikana geometriassa käytettiin usein myös neusis-menetelmät mahdollistavaa viivainta, johon on merkitty kiinteä jana.

Kuution kahdennusongelma tunnettiin antiikin aikana myös *Deloksen ongelmana*. Yksi asiaan liittyvän legendan versio kertoo, että Delos-saarta vaivanneen kulkutautiepidemian vuoksi konsultoitu oraakkeli oli kehottanut kaksinkertaistamaan Apollon temppelin kuutionmuotoisen alttarin. Epidemia ei ollut hellittänyt, vaikka työmiehet olivat rakentaneet alttarin, jonka mittasuhteet olivat alkuperäiseen verraten kaksinkertaiset. Deloksen asukkaat kysyivät neuvoa Platonilta, jonka piirin matemaatikot yrittivät ratkaista ongelmaa.

Neliön kahdennustehtävä: etsi x, jolle $x^2 = 2a^2$, voidaan ratkaista etsimällä a:n ja $2a$:n keskiverto:

$$\frac{2a}{x} = \frac{x}{a}.$$

Hippokrates (joka eli paljon ennen Platonia!) keksi, että kuution kahdennusongelma palautuu samalla tavoin kahden janan kahden keskiverron määrittämiseen: jos

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

niin

$$\frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{2a} = \frac{1}{2}.$$

Menaikhmos puolestaan osoitti, että Hippokrateen versio ongelmasta palautui paraabelin (nykyaikaisin merkinnöin esim. $y^2 = \frac{a}{2}x$) ja hyperbelin (nykyaikaisin merkinnöin $xy = a^2$) leikkauspisteen etsimiseen.

Ympyrän neliöinti on kautta aikojen ollut matemaatikkojen piirin ulkopuolellakin tunnettu esimerkki vaikeasta tai mahdottomasta tehtävästä. *Dante Alighierin* (1265–1321) *Jumalaisen näytelmän* viimeisestä runosta: ”Kuin matemaatikko, kun ympyrää hän / keskittyy nelöimään eikä keksi / suhdetta tärkeää, jos kuinka miettii . . . ” (Elina Vaaran suomennos).

4.6 Zenonin paradoksit

Yhteismitattomuuden tavoin merkittävää osaa kreikkalaisen matematiikan kehityksessä näyttelivät elealaisen *Zenonin* (n. 450 eKr.) liikettä, aikaa ja äärettömyyttä koskevat paradoksit *dikotomia*, *Akhilleus ja kilpikonna*, *nuoli* ja *stadion*. Jos on kuljettava 0:sta 1:een, on ohitettava pisteet $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, jne. Äärettömän monessa pisteessä ei voi vierailla äärellisessä ajassa, joten liike ei ole mahdollista. Jotta Akhilleus tavoittaisi kilpikonnan, hänen on ensin päästävä pisteeseen, jossa kilpikonna oli liikkeelle lähdettäessä, sitten pisteeseen, jossa kilpikonna oli Akhilleuksen ollessa edellä tarkasteltuna hetkenä jne. Näin Akhilleus on aina kilpikonnaa jäljessä. Lentävä nuoli on jokaisena ajanhetkenä tietyssä paikassa. Se ei siis voi liikkua. Olkoon kolme riviä esineitä:

$$\begin{array}{cccccc} & A & A & A & A & \\ B & B & B & B & & \\ & & C & C & C & C \end{array}$$

Jos A:t ovat paikallaan, B:t liikkuvat oikealle niin, että lyhyimpänä mahdollisena aikana B:t siirtyvät yhden pykälän A:ihin verrattuna ja C:t liikkuvat samoin vasemmalle, niin lyhyimpänä mahdollisena hetkenä B:t ja C:t siirtyvätkin toisiinsa nähden kaksi pykälää, joten on vielä lyhempiä hetkiä.

Zenonin paradoksit osoittavat, että avaruuden käsittäminen diskreetiksi – mikä oli kokonaislukuihin perustuvan pythagoralaisen matematiikan mukainen käsitys – johtaa ongelmiin. *Aristoteles* (384–322 eKr.) torjui paradoksit tuomalla matematiikkaan *luvun* ja *suureen* eron. Suuretta voidaan jakaa rajatta. Aristoteles käsitteli filosofiassaan äärettömän käsitettä. Hänen kantansa oli, että ns. *aktuaalista ääretöntä* ei ole olemassa, sen sijaan kyllä *potentiaalinen äärettömyys*. Suoran ei tarvitse olla ääretön, riittää, kun sitä voidaan jatkaa niin pitkälle kuin on tarpeen. – Zenonin paradokseihin sisältyvät ongelmat tulivat uudelleen merkityksellisiksi nykyaikaisen matemaattisen analyysin myötä.

4.7 Tyhjennysmenetelmä ja suhdeoppi

Vaikka filosofi *Platon* (429–347 eKr.) ei itse ollut matemaatikko, hänen Ateenassa noin vuodesta 387 eKr. toimineen filosofikoulunsa, *Akademian*, (jonka portilla kerrotaan olleen tekstin ΑΓΕΩΜΕΤRΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ, "pääsy kielletty geometriaan perehtymättömiltä") piirissä toimi useita huomattavia matemaatikkoja, mm. jo mainittu Menaikhmos.

Platon itse oli ollut kosketuksissa pythagoralaisiin Sisiliassa. Platonin hahmotteleman ideaalivaltion filosofijohtajien tuli olla matemaattisesti koulutettuja. Platonin omat filosofiset kirjoitukset ovat ensimmäisiä, joissa esiintyy matematiikan perusteita käsitteleviä jaksoja ja viittauksia matematiikan deduktiiviseen rakenteeseen. – Platonin *Valtio*-teoksessa esitetään, että sopivin valtion asukasmäärä on 5 040, koska kyseinen luku on lukujen 12, 21 ja 20 tulo, koska sen kahdestoista osa on jaollinen 12:lla ja koska se on jaollinen kaikilla luvuilla 1:stä 12:een (paitsi 11:llä; kuitenkin 5 038 on 11:llä jaollinen).

Huomattavin Platonin piirin matemaattinen edustaja on knidoslainen *Eudoksos* (408[?]–355 eKr.). Eudoksos saattoi yhteismitattomien suureiden suhdeopin loogisesti pitävälle perustalle seuraavalla määrittelyllä: Jos A, B, C ja D ovat samaa laatua olevia suureita (pituuksia, pinta-aloja jne.), niin yhtäsuuruus $A : B = C : D$ on voimassa silloin ja vain silloin, kun jokainen positiivisten kokonaislukujen pari m, n toteuttaa tasan yhden seuraavista kolmesta relaatiosta:

$$\begin{aligned} mA < nB &\quad \text{ja} \quad mC < nD, \\ mA = nB &\quad \text{ja} \quad mC = nD, \\ mA > nB &\quad \text{ja} \quad mC > nD. \end{aligned}$$

Tämän voi tulkita vaikkapa niin, että kaksi "irrationaalista" suhdetta ovat samat, jos jokainen rationaalilukujen suhde, joka on toista irrationaalisuhdetta pienempi, on toistakin pienempi, mutta eri suuret, jos on olemassa rationaalilukusuhde, joka on toista irrationaalisuhdetta suurempi ja toista pienempi. Eudoksoksen määritelmä tulee hyvin lähelle runsaat kaksituhatta vuotta myöhemmin (1800-luvun lopulla) esitettyä reaalilukujen määrittelyä rationaalilukujen joukon ns. *Dedekindin leikkauksina*!

Toinen Eudoksoksen merkittävä keksintö oli ns. *ekshaustio-* eli *tyhjennysmenetelmä* pinta-alojen ja tilavuuksien määrittämiseksi tai yhtäsuuruuden todistamiseksi. Tyhjennysmenetelmän ydin on seuraava raja-arvokäsitteelle sukua oleva havainto: Olkoon annettuna kaksi suuretta, A ja B. Jos A:sta vähennetään suure, joka on suurempi kuin $A/2$, jäljellä olevasta osasta taas yli puolet jne., tullaan aina lopulta tilanteeseen, jossa jäännös on pienempi kuin B. Tyhjennysmenetelmän avulla voidaan muodostaa täsmällisiä epäsuoria todistuksia käyräviivaisten kuvioiden mittalukuja koskeville lauseille ja määrittää pinta-aloja ja tilavuuksia, tarvitsematta varsinaisesti mennä raja-arvoihin tai vastaaviin äärettömiin prosesseihin.

Esimerkiksi lause ”ympyröiden alat suhtautuvat toisiinsa kuten säteiden neliöt” voidaan ekshaustiomenetelmällä todistaa epäsuorasti vertaamalla r_1- ja r_2-säteisten ympyröiden aloja A_1 ja A_2 sisään piirrettyjen säännöllisten monikulmioiden aloihin, joiden tiedetään suhtautuvan kuten vastinjanojen neliöt. Jos $A_1 > \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2 A_2$ ja $B = A_1 - \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2 A_2$, saadaan jakoa tihentämällä r_1-säteisen ympyrän sisään piirretyn monikulmion alan ja A_1:n erotus pienemmäksi kuin B. Jos nimittäin k-kulmio vaihdetaan $2k$-kulmioksi, ympyrän ja monikulmion välinen ala pienenee tasan puolella sellaisten suorakaiteiden alasta, joiden kannat ovat k-kulmion sivuja ja korkeudet monikulmion ja ympyrän erotuksen muodostavien ympyränsegmenttien korkeuksia. Koska segmentin ala on pienempi kuin sitä ympäröivän suorakaiteen, tyhjennysehto täyttyy. Jos nyt $A_1^{(k)}$ ja $A_2^{(k)}$ ovat ympyröiden sisään piirrettyjen säännöllisten k-kulmioiden alat, niin jollain k:n arvolla $A_1 - A_1^{(k)} < B = A_1 - \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2 A_2$. Tästä ja monikulmioille tunnetusta tuloksesta $A_1^{(k)} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2 A_2^{(k)}$ sekä epäyhtälöstä $A_2^{(k)} < A_2$, johdutaan ristiriitaan

$$B = A_1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 A_2 = A_1 - A_1^{(k)} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 A_2^{(k)} - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 A_2 < A_1 - A_1^{(k)} < B.$$

Toinen vastaavanlainen ristiriita johdetaan oletuksesta $A_1 < (r_1/r_2)^2 A_2$. Ainoaksi mahdollisuudeksi jää siis $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{r_1^2}{r_2^2}$.

Eudoksoksen tyhjennysmenetelmätarkasteluja voidaan pitää integraalilaskennan edelläkävijänä. Tyhjennysmenetelmällä suoritetut päättelyt ovat kuitenkin yleensä erittäin monimutkaisia. Kahden suureen yhtäsuuruuden osoittaminen vaatii kaksi epäsuoraa todistusta, kummallekin mahdolliselle epäyhtälön suuruussuunnalle. – Eudoksos oli paitsi matemaatikko myös merkittävä tähtitieteilijä. Hänen hahmottelemansa maailmanjärjestys perustui 27:ään sisäkkäiseen eri tavoin pyörivään palloon, joiden yhteisvaikutuksena syntyvä taivaankappaleiden liike oli kohtuullisen hyvin sopusoinnussa havaintojen kanssa.

4.8 Eukleides ja Alkeet

Aleksanteri Suuren seuraaja Egyptissä, *Ptolemaios I*, perusti noin 300 eKr. Aleksandriaan *Museion*-nimisen instituutin, jota voidaan pitää maailman ensimmäisenä yliopistona. Museion jakautui neljään osastoon, jotka omistautuivat kirjallisuudelle, matematiikalle, tähtitieteelle ja lääketieteelle. Museionin ensimmäinen matematiikan edustaja oli *Eukleides* (365[?]–300[?] eKr.). Eukleides oli luultavasti saanut koulutuksensa Platonin Akatemiassa, mutta hänen elämänvaiheistaan ei juuri ole tietoa. Eukleideen kuuluisin teos on *Stoikheia*, eli *Alkeet*, joka tunnetaan yleisesti myös latinankielisellä nimellään *Elementa*. Alkeet on luultavasti kaikkien aikojen menestyksellisin matemaattis-luonnontieteellinen teos. Se levisi lukemattomina käsikirjoituksina (joissa luonnollisesti oli virheitä ja parannuksia tai parannusyrityksiä) ja käännöksinä; vuodesta 1482 alkaen on myös painettuja versioita ainakin toista tuhatta. Kouluopetuksessa teos oli keskeisenä oppikirjana 1800-luvulle asti useissa maissa, myös Suomessa. – Samanlaisia yleisesityksiä oli kyllä kirjoitettu jo ennen Eukleidesta. Mm. Hippokrateen tuotantoon tiedetään kuuluneen Alkeet-teoksen, joka kuitenkaan ei ole säilynyt.

Alkeet jakautuu 13 "kirjaksi". Se sisältää yhteensä 465 propositiota eli lausetta, jotka muodostavat koko Eukleidesta edeltävän ajan matematiikan yleisesityksen. Suuri osa teoksen sisällöstä on peräisin Eukleideen edeltäjiltä.

Alkeiden I kirja esittää ensin joukon geometristen käsitteiden määritelmiä. Sen jälkeen seuraavat viisi postulaattia ja viisi aksioomaa. Postulaatit ovat geometrialle ominaisia:

1. On mahdollista piirtää suora mistä hyvänsä pisteestä mihin hyvänsä pisteeseen.
2. On mahdollista jatkaa janaa jatkuvasti suoraksi.
3. On mahdollista piirtää ympyrä, jonka keskipiste on mikä hyvänsä ja keskipisteen ja kehän etäisyys mikä hyvänsä.
4. Kaikki suorat kulmat ovat keskenään yhtä suuria.
5. Jos suora, joka leikkaa kaksi muuta suoraa, synnyttää samalle puolelle itseään kaksi sisäpuolista leikkauskulmaa, jotka ovat yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa, niin suorat, jos niitä rajatta jatketaan, kohtaavat toisensa sillä puolen kolmatta suoraa, missä ovat kaksi mainittua kulmaa, jotka ovat yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa.

Aksioomat puolestaan ilmaisevat universaaleja suuruussuhteisiin liittyviä totuuksia:

1. Asiat, jotka ovat samat kuin jokin asia, ovat myös keskenään samat.
2. Jos yhtä suuriin lisätään yhtä suuret, niin kokonaisuudet ovat yhtä suuret.
3. Jos yhtä suurista vähennetään yhtä suuret, niin jäännökset ovat yhtä suuret.
4. Asiat, jotka yhtyvät toisiinsa, ovat yhtä suuret.
5. Kokonaisuus on suurempi kuin sen osa.

I kirjan propositiot käsittelevät kolmioiden ja monikulmioiden sekä yhdensuuntaisten suorien perusominaisuuksia. 5. propositio on tullut tunnetuksi nimellä *pons asinorum*, aasin silta. Siinä Eukleides todistaa ovelalla, mutta ilmeisesti aloittelijalle vaikeasti ymmärrettävällä tavalla, että tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Pythagoraan lause on I kirjan viimeinen, 47. propositio. II kirja esittelee kreikkalaisen geometrisen algebran, mm. toisen asteen yhtälön geometrisen ratkaisun. III kirja käsittelee ympyröitä. Mielenkiintoinen on ympyrän kehän ja sen tangentin välisen "nollakulman" käsittely. IV kirjan aiheena ovat ympyrän sisään ja ympäri piirretyt monikulmiot. V kirja esittelee Eudoksoksen suhdeopin. Suhdeoppi on tarpeen VI kirjassa, jossa käsitellään yhdenmuotoisuutta.

Paitsi alkeisgeometrian aksiomaattista käsittelyä Alkeet sisältää kirjoissa VII, VIII ja IX koko joukon alkuaan pythagoralaista lukuteoriaa, esim. *Eukleideen algoritmin* kahden luvun suurimman yhteisen tekijän tai kahden suureen yhteisen mitan löytämiseksi. Lukujen a ja b yhteiset tekijät ovat tekijöinä jakoyhtälön $a = q_1b + r_1$ mukaisessa jakojäännöksessä r_1, jakoyhtälön $b = q_2r_1 + r_2$ jakojäännöksessä r_2 jne. Koska $b > r_1 > r_2 > \ldots$, jokin jakojäännös on viimeinen positiivinen jakojäännös. Siinä ovat edelleen tekijöinä a:n ja b:n yhteiset tekijät ja vain ne. Jos a ja b ovat mielivaltaisia suureita, esim. janoja, Eukleideen algoritmi päättyy äärellisen monen askeleen jälkeen, jos ja vain jos a ja b ovat yhteismitallisia.

Klassisen kaunis todistus alkulukujen määrän rajattomuudesta saattaa olla Eukleideen oma oivallus. Mitä hyvänsä äärellistä alkulukujen kokoelmaa $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ kohden voidaan valita luku, jossa ne kaikki ovat tekijöinä, esim. lukujen tulo $p_1p_2\cdots p_k$, ja lisätä tätä lukua yhdellä. Luku $p_1p_2\cdots p_k+1$ on joko itse alkuluku tai sillä on alkutekijä, joka ei voi olla mikään luvuista $p_1, p_2, \dots p_k$.

Stoikheian kirjoista laajin on kirja X, joka sisältää muotoa $\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ olevien suureiden luokittelun. Viimeiset kirjat käsittelevät avaruusgeometriaa ja tyhjennysmenetelmää. Ne huipentuvat todistukseen täsmälleen viiden säännöllisen monitahokkaan (*”Platonin kappaleen”*) olemassaolosta ja näiden kappaleiden tilavuuksien laskemiseen.

Stoikheian merkitys on paitsi sisällössä myös deduktiivisessa esitystavassa. Kaikki lauseet johdetaan suoraan tai välillisesti määritelmistä, postulaateista ja aksioomista. Yleisenä tiedonmuodostusmenetelmänä aksiomaattis-deduktiivinen metodi on lähtöisin Aristoteleelta. Myöhemmin on Eukleideen päättelyistä löydetty sieltä täältä aukkoja ja virheitä, mutta itse aksiomaattis-deduktiivinen metodi on tullut matematiikan vakiintuneeksi esitystavaksi.

Erityisen merkityksen tuli saamaan Eukleideen viides postulaatti eli ns. *paralleeliaksiooma*, jonka itsestäänselvyys ei ole läheskään niin kiistaton kuin muiden postulaattien. Paralleeliaksiooma tunnetaan usein yhtäpitävässä muodossa ”suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan piirtää yksi ja vain yksi suoran kanssa yhdensuuntainen suora”. Tätä muotoilua kutsutaan *Playfairin aksioomaksi* skottilaisen *John Playfairin* (1748–1819) mukaan; Playfair oli kuitenkin vain ottanut käyttöön ainakin jo Prokluksen tunteman muotoilun.

Monet matemaatikot yrittivät eri aikoina johtaa paralleelipostulaatin muista aksioomista. Vasta 1800-luvulla nämä yritykset osoitettiin mahdottomiksi, samalla kun konstruoitiin ns. *epäeuklidisia geometrioita*, joissa paralleelipostulaatin korvaa jokin muu suorien yhdensuuntaisuutta koskeva oletus.

4.9 Arkhimedes

Antiikin lahjakkaimpana matemaatikkona ja luonnontieteilijänä pidetään *Arkhimedesta* (287[?]–212 eKr.). Hän toimi Syrakusassa, mutta oli ilmeisesti saanut koulutuksensa Aleksandriassa. Useimmat Arkhimedeen teknistä taitavuutta koskevat kertomukset liittyvät Syrakusan piiritykseen ja valloitukseen Rooman ja Karthagon välisessä toisessa puunilaissodassa. Vaikka Arkhimedeen kuuluisuus liittyy ennen muuta hänen fysikaalis-teknisiin keksintöihinsä, tarina Arkhimedeen kuolemasta kertoo hänen askarrelleen matematiikan parissa silloinkin, kun roomalainen sotilas hänet surmasi. Arkhimedeen väitetyt viimeiset sanat ”älä sotke ympyröitäni”, ”*noli turbare circulos meos*” ovat jääneet lentäväksi lauseeksi. (Mutta Arkhimedes ei luultavasti puhunut latinaa.)

Arkhimedes oli ensimmäinen rationaalisia fysikaalisia periaatteita kehitellyt ajattelija: hänen keksintöään ovat vipulaki (”antakaa minulle kiinteä piste, niin vipuan maan paikoiltaan”) ja hydrostatiikan Arkhimedeen periaate (kappaleeseen kohdistuva noste on yhtä suuri kuin kappaleen syrjäyttämän nestemäärän paino). Tunnettu Arkhimedes-legenda kertoo Arkhimedeen *heureka*-huudahduksesta hänen oivallettuaan nostelain.

Arkhimedeen monipuolisen matemaattisen tuotannon painopiste on aiheissa, jotka nykyisin katsotaan integraalilaskennaksi: hän todisti täsmällisesti, ekshaustiomenetelmää käyttäen, että ympyrän ala on puolet säteen ja kehän tulosta, laski paraabelin segmentin ja ellipsin alan, pallon alan ja tilavuuden, pyörähdyskappaleiden tilavuuksia, erilaisten kuvioiden ja kappaleiden painopisteitä, ympyrän kehän pituuden likiarvoja kuten säännöllisen 96-kulmion ominaisuuksista johdettavan

$$3\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} < \pi < 3\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}},$$

jonka Arkhimedes yksinkertaisti muotoon $3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{1}{7}$.

Arkhimedeen säilyneissä kirjoituksissa esiintyvät todistukset perustuvat vaikean ekshaustiomenetelmän käyttöön. Vuonna 1906 löydettiin kuitenkin *palimpsesti*, pergamenttikirja[1], josta myöhemmän rukouskirjatekstin alta paljastui Arkhimedeen teoksia. Näiden joukossa oli Arkhimedeen aleksandrialaiselle *Eratostheneelle* (n. 276 – n. 196 eKr.; tunnettu mm. alkuluvut tuottavasta *Eratostheneen seulasta* ja maapallon mittasuhteiden rationaalisesta määrittämisestä) kirjoittama kirje, joka tunnetaan nimellä *Metodi*. Siinä esitetään oikotie: alue, jonka pinta-ala halutaan laskea, jaetaan janoiksi, joita verrataan pinta-alaltaan tunnetun alueen janoihin asettamalla kyseiset osat ikään kuin erivartisen vaa'an kuppeihin. Tällä integraalilaskentaa muistuttavalla menetelmällä Arkhimedes pystyi nopeasti laskemaan esim. paraabelinkaaren rajoittamien alueiden aloja, mutta koska menetelmä oli loogisesti epätyydyttävä (äärettömän monen äärettömän pienen suureen summat!), hän varmensi tulokset ekshaustiomenetelmään perustuvin todistuksin.

Arkhimedeen punnitusideaa voi tarkastella esim. seuraavassa hiukan nykyaikaistetussa esimerkissä: halutaan laskea

$$\int_{-1}^{0} x^2\,dx$$

eli paraabelin $y = x^2$, suoran $x = -1$ ja x-akselin rajoittama pinta-ala. Leikataan tämä ala infinitesimaalisiksi x^2-korkuisiksi suikaleiksi, jotka vuorollaan sijoitetaan pisteeseen -1. Jos vaa'an tasapainopiste on origo, tällainen suikale tasapainottaa etäisyydellä x origosta olevan x-korkuisen infinitesimaalisen suikaleen. Koko kysytty pinta-ala A tulee siten tasapainottamaan kolmion, jota rajoittavat suorat $y = x$, $x = 1$ ja $y = 0$. Kolmion ala on $\dfrac{1}{2}$, ja sen painopisteen x-koordinaatti on $\dfrac{2}{3}$. Tasapainoyhtälöksi painopisteiden suhteen saadaan $A \cdot 1 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3}$, josta $A = \dfrac{1}{3}$.

Paraabelin alan laskemista ekshaustiomenetelmällä voi edustaa seuraava nykymerkinnöin esitetty Arkhimedeen päättely. Lasketaan suorien $y = 1$ ja $x = 0$ paraabelista $y = x^2$ erottama ala S. Se voidaan tyhjentää kolmioilla Δ_1, jonka kärjet ovat $(0,\,0)$, $(1,\,1)$ ja

[1] Pergamentit katosivat sittemmin, mutta ne tulivat uudelleen esiin huutokaupassa vuonna 1998, tosin kunnoltaan huonontuneina.

(0, 1), Δ_2, jonka kärjet ovat (0, 0), (1/2, 1/4) ja (1, 1), Δ_{31} ja Δ_{32}, joiden kärjet ovat (0, 0), (1/4, 1/16) ja (1/2, 1/4) sekä (1/2, 1/4), (3/4, 9/16) ja (1, 1) jne. Kolmion Δ_1 ala on $\frac{1}{2}$. Suora $x = \frac{1}{2}$ jakaa kolmion Δ_2 kahdeksi kolmioksi, joilla on yhteinen kanta, jonka pituus on $\frac{1}{4}$ ja yhteinen korkeus $\frac{1}{2}$. Kummankin kolmion ala on näin ollen $\frac{1}{16}$, joten kolmion Δ_2 ala on $\frac{1}{8}$. Samoin nähdään, että kolmioiden Δ_{31} ja Δ_{32} yhteinen ala on $\frac{1}{32}$. n:n vaiheen jälkeen kolmioiden ala on $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^n}\right)$. Joka vaiheessa uudet kolmiot peittävät yli puolet edellisten kolmioiden ja paraabelin väliin jäävästä alueesta. Oletukset $S < \frac{2}{3}$ ja $S > \frac{2}{3}$ johtavat ristiriitaan. (Arkhimedeella oli käytössään jo Eukleideen tuntema kaava päättyvän geometrisen sarjan summalle.) Siis $S = \frac{2}{3}$.

Arkhimedeen spiraali on transkendenttikäyrä, jonka muodostaa tasaisella nopeudella pyörivällä säteellä tasaisella nopeudella liikkuva piste. Arkhimedeen spiraalin napakoordinaattimuotoinen yhtälö on $r = a\phi$. Arkhimedes määritti sekä spiraalin tangentin pituuden että spiraalin ja radiusvektoreiden rajoittaman alueen pinta-alan.

Arkhimedeelle itselleen oli erityisen läheinen pallon tilavuuden johto; hän toivoi hautakiveensä kuvion, joka esittää palloa, kartiota ja lieriötä. Jos r-säteinen pallo sijoitetaan r-säteisen ja $2r$-korkeuksisen lieriön sisään ja samaan kuvioon liitetään kartio, jonka huippu on pallon keskipisteessä ja jonka pohja yhtyy lieriön pohjaan, niin etäisyydellä x pallon keskipisteestä tehty lieriön ja kartion akselia vastaan kohtisuora tasoleikkaus erottaa lieriöstä r-säteisen ympyrän, pallosta $\sqrt{r^2 - x^2}$-säteisen ympyrän ja kartiosta x-säteisen ympyrän. Koska ympyrän ala on verrannollinen ympyrän säteen nelöön, pallon ja kartion ympyräleikkausten yhteinen ala on $\pi x^2 + \pi(r^2 - x^2) = \pi r^2$. Koska pallon ja kartion leikkaukset näin tasapainottavat lieriön leikkaukset, on puolipallon ja kartion yhteinen tilavuus sama kuin lieriön(puolikkaan). Tästä seuraa, että pallon tilavuus on $\frac{2}{3}$ lieriön tilavuudesta (joka on pohjaympyrän ala kerrottuna korkeudella). Pallon tilavuuden määritys palautuu täten ympyrän neliöintiongelmaan.

Eräs Arkhimedeen saavutuksia oli erittäin suurten lukujen merkitsemiseen soveltuva lukujen merkintätapa (jota Arkhimedes demonstroi mielikuvituksellisella laskutehtävällä: laskemalla maailmankaikkeuden täyttämiseksi tarvittavien hiekanjyvästen määrän – Arkhimedeen mukaan 10^{63}). Tässä yhteydessä Arkhimedes johtui lähelle logaritmilaskennan perusperiaatetta: lukujen kertolaskua vastaa eksponenttien yhteenlasku. Arkhimedes totesi, että luvut 1:stä 10^8:aan eli myriadi myriadiin asti ovat nimettävissä, Ne muodostavat ensimmäisen *luokan*, luvut 10^8:sta 10^{16}:een muodostavat toisen luokan jne., kunnes $P = 10^{8\cdot10^8}$ päättää ensimmäisen *jakson*. Toisen jakson suurin luku on P^2; menetelmää jatketaan, kunnes tullaan "myriadis myriadinteen" jaksoon, jonka suurin luku on P^{10^8}. Arkhimedeen järjestelmä mahdollistaisi kaikkien kymmenjärjestelmässä enintään 80000 biljoonalla numerolla kirjoitettavien lukujen nimeämisen. – Arkhimedeen nimissä on myös ns. *karjaongelma*, hiukan epäselvästi muotoiltu kokonaislukuyhtälöryhmä, joka tavallisen tulkinnan mukaan redusoituu yhtälöön $x^2 - 4729494y^2 = 1$. Yhtälön ratkaisut ovat niin suuria lukuja, että niiden kirjoittamiseen tarvittaisiin satojatuhansia numeroita.

4.10 Apollonios ja kartioleikkaukset

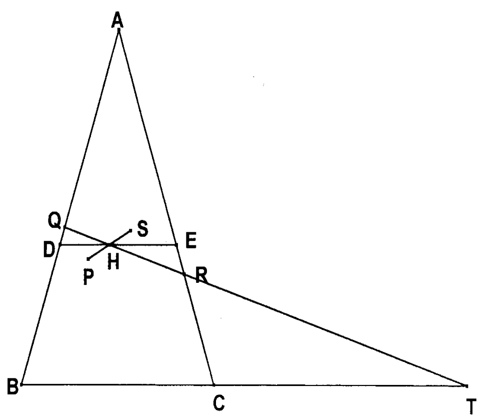
Menaikhmoksen aloittaman kartioleikkauskäyrien teorian tutkimuksen vei pisimmälle pergalainen[1], Aleksandriassa opiskellut *Apollonios* (260[?]–170 eKr.), jonka kahdeksanosainen kartioleikkausten teorian yleisesitys *Konika* sisältää aiheesta olennaisesti samat tiedot kuin vakiintunut analyyttisen geometrian oppimäärä nykyisin: kartioleikkausten liittohalkaisijat, tangentit, normaalit, leikkaaminen, asymptootit. Esitys on kuitenkin puhtaasti synteettisen geometrian mukainen, koordinaatteja tai muita laskennallisia apuneuvoja Apollonios ei sallinut tai tuntenut. Tutut nimitykset *ellipsi, paraabeli* ja *hyperbeli* ovat peräisin Apolloniokselta; ne voidaan nykyaikaisia merkintöjä käyttäen ymmärtää vertaamalla paraabelin ("asettaa rinnalle") yhtälöä

$$y^2 = px$$

ellipsin ("jää vajaaksi") ja hyperbelin ("ylittyy") yhtälöihin

$$y^2 = px \pm \frac{p}{d}x^2.$$

Alkuaan kartioleikkaukset ajateltiin aina syntyviksi suorista ympyräkartioista sivuviivoja vastaan kohtisuorilla tasoilla tehdyissä leikkauksissa. Ellipsi, paraabeli ja hyperbeli olivat siten terävä-, suora- ja tylppäkulmaisen kartion leikkauksia. Apollonios käytti yleistä kartiota ja leikkaustasoa.



Taso leikkaa kartion

Olkoon A suoran ympyräpohjaisen kartion kärki ja BC pohjaympyrän halkaisija. Leikataan kartio tasolla τ, joka ei ole pohjatason suuntainen ja joka leikkaa suoran BC pisteessä T, joka ei ole janalla BC, sekä suorat AB ja AC pisteissä Q ja R. Olkoon P mielivaltainen tason τ ja kartiopinnan leikkauskäyrän piste ja leikatkoon P:n kautta piirretty QR:ää vastaan kohtisuora suora QR:n pisteessä H ja kartiopinnan vielä pisteessä S. Asetetaan

[1] Apollonioksen kotikaupungin nimi esiintyy myös muodossa Perge.

nyt suoran PS kautta pohjaympyrän suuntainen taso, joka leikkaa kartiopinnan pitkin ympyrää ja suorat AB ja AC pisteissä D ja E. Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan heti

$$\frac{HD}{HQ} = \frac{BT}{TQ}, \quad \frac{HE}{HR} = \frac{CT}{RT}.$$

Käyttämällä hyväksi tietoa pisteen H potenssista ympyrän $DPES$ suhteen saadaan

$$PH^2 = HD \cdot HE = \frac{BT \cdot HQ}{TQ} \cdot \frac{CT \cdot HR}{RT} = k \cdot HQ \cdot HR.$$

Jos sijoitettaisiin origo pisteeseen Q ja x-akseli suoralle QR ja merkittäisiin $QR = a$, $HQ = x$, $HP = y$, nähtäisiin, että Apollonioksen johtama relaatio olisi $y^2 = kx(a - x)$ eli $k\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{ka^2}{4}$. Toisaalta kartioleikkauksen kytkeytyminen pinta-alan sovitustehtävään on ilmeinen. Aivan sama päättely antaa kartion ja AC:n suuntaisen tason leikkauskuvion pisteille paraabelin yhtälön ja AB:n mutta ei puolisuoraa AC leikkaavan tason ja kartion leikkauskäyrälle hyperbelin yhtälön. Jos kartio otetaan kaksivaippaisena, saadaan leikkauskuviosta hyperbelin molemmat haarat. – Hiukan yllättävää on, että Apollonios ei lainkaan viittaa kartioleikkausten yksinkertaiseen määrittelyyn niiden pisteiden urana eli joukkona, joiden kiinteästä suorasta, *johtosuorasta*, ja kiinteästä pisteestä, *polttopisteestä*, laskettujen etäisyyksien suhde on vakio, < 1 hyperbelillä. $= 1$ paraabelilla ja > 1 ellipsillä.

Apollonioseen liittyy monia muitakin geometrian käsitteitä kuin kartioleikkaukset. Apollonios ratkaisi kysymyksen kolmea ympyrää sivuavan ympyrän konstruoimisesta. Alkeisgeometrian *Apollonioksen ympyrä* on niiden pisteiden joukko, joiden kahdesta kiinteästä pisteestä laskettujen etäisyyksien suhde on vakio. Aikalaiset ja jälkeen tulleet arvostivat Apolloniosta. Hänestä käytettiin antiikin aikana nimitystä *Suuri Geometrikko*.

Kartioleikkausten teorian kehittyminen lähes 2000 vuotta ennen kuin niiden fysikaalinen merkitys tuli ilmi Keplerin planeettateorian ja Newtonin mekaniikan myötä on yksi vastaesimerkki teoreettisen, "puhtaan" matematiikan hyödyllisyyttä epäileville.

4.11 Aritmetiikka ja algebra

Aritmetiikan alalla jossain määrin Eukleideen Alkeiden kaltaiseksi perusteokseksi muodostui *Nikomakhoksen* (n. 100 jKr) *Arithmetika*. Siinä esiteltiin antiikin lukuteoreettinen tietämys kokonaan geometriasta irrotettuna.

Kreikkalaisen antiikin merkittävin aritmeettis-algebrallisen perinteen edustaja oli aleksandrialainen *Diofantos* (250 jKr.?). Diofantosta kutsutaan toisinaan algebran isäksi. Nimitys ei ole kovin osuva.

Hänen pääteoksensa, myös nimeltään *Arithmetika*, sisältää suuren ja monipuolisen joukon yhden tai useamman tuntemattoman polynomiyhtälöiksi ja yhtälöryhmiksi tunnistettavia probleemoja, joihin etsitään *kokonaisluku-* tai *rationaalilukuratkaisuja*; näitä yhtälöitä kutsutaan nykyäänkin *Diofantoksen yhtälöiksi.* Diofantos itse asiassa laajensi aikaisemman kokonaislukua tarkoittaneen $\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma$-sanan merkityksen positiivisiin rationaalilukuihin. Arithmetikan ilmeisesti alkuaan 13 kirjasta on säilynyt kuusi, mutta vuonna 1973 löytyi ilmeisesti neljän muun kirjan arabiankielinen versio.

Diofantoksen ratkaisut perustuvat yleensä kekseliäisiin oivalluksiin eivätkä ne muodosta yhtenäistä teoriaa. Diofantos on ensimmäinen kirjoittaja, jonka teksteissä esiintyy algebrallisen symbolismin alkeita. Diofantoksen symboliikka soveltui polynomilausekkeiden kirjoittamiseen. Hän käytti tuntemattomalle lyhennysmerkintää, jonka tarkka muoto on kopioinneissa hämärtynyt, mutta jonka on arveltu syntyneen sanan $\alpha\rho\iota\theta\mu o\sigma$ ensimmäisistä kirjaimista $\alpha\rho$. Merkintä muistuttaa kirjainta ζ. Tuntemattoman toista potenssia Diofantos merkitsi Δ^{Υ} ja sen kolmatta potenssia K^{Υ}. Neljäs, viides ja kuudes potenssi olivat $\Delta^{\Upsilon}\Delta$, $\Delta\mathrm{K}^{\Upsilon}$ ja $\mathrm{K}^{\Upsilon}\mathrm{K}$. Vakiotermin merkki oli $\overset{\circ}{\mathrm{M}}$. Symbolia seurasi tuntemattoman kertoimen numeroarvo (joonialaisin numeroin), ja yhteenlasku osoitettiin kirjoittamalla termit perätysten. Matemaattisista operaattoreista vain vähennyslaskun operaattorille oli Diofantoksen järjestelmässä oma merkkinsä. Se oli $\Lambda\!\!\!|$, joka edelsi vähennettäviä termejä. Diofantos myös operoi vähennyslaskulla tavoilla, jotka voidaan ymmärtää säännöiksi $(-)\times(+) = (-1)$ ja $(-)\times(-1) = (+)$. Merkintä $K^{\Upsilon}\beta\zeta\epsilon\Lambda\!\!\!|\Delta^{\Upsilon}\gamma\overset{\circ}{\mathrm{M}}\mu\delta$ tarkoittaisi polynomia $2x^3 + 5x - 3x^2 - 44$.

Suurin osa Diofantoksen Arithmetikan ongelmista koskee yhden tai useamman tuntemattoman polynomiyhtälöitä, kuten $y^2 = Ax^2 + Bx + C$ tai $y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Yhtälöt ovat joko determinoituja tai ei. Kertoimet on yleensä valittu niin, että sopivien sijoitusten jälkeen jäljelle jää lineaarinen yhtälö. Esimerkiksi yhtälö $y^2 = Ax^2 + Bx + C$ voidaan ratkaista, jos $A = a^2$ tai $C = c^2$. Edellisessä tapauksessa sijoitus $y = ax + m$ johtaa yhtälöön $2amx + m^2 = Bx + C$, jälkimmäisessä tapauksessa sijoitus $y = mx + c$ yhtälöön $m^2x^2 + 2mcx = Ax^2 + Bx$ eli $(m^2 - A)x = B - 2mc$. Pythagoraan lukuihin johtavan tehtävän $x^2 + y^2 = a^2$ Diofantos ratkaisi sijoituksella $y = mx - a$. Diofantos hyväksyi vain rationaaliset juuret ja aina vain yhden juuren.

Diofantoksen vaikutusta aikalaismatematiikkaan ei juuri ole havaittu. Sen sijaan hän vaikutti paljonkin 1500- ja 1600-luvuilla, kun algebra varsinaisesti teki tuloaan matematiikan piiriin.

Tarinan mukaan Diofantoksen iän saattoi laskea seuraavien tietojen perusteella:

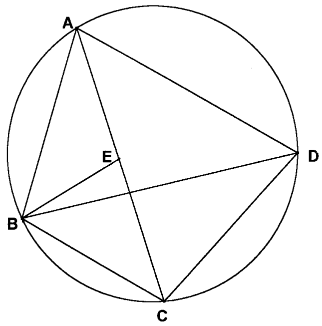
> Diofantos eli $\frac{1}{6}$:n elämästään lapsena, $\frac{1}{12}$:n nuorukaisena ja sitten vielä $\frac{1}{7}$:n poikamiehenä. Viisi vuotta sen jälkeen, kun Diofantos oli mennyt naimisiin, hän sai pojan, joka kuoli neljä vuotta isäänsä ennen ja saavutti puolet isänsä ikävuosista.

Mikä mahtoi olla Diofantoksen ikä?

4.12 Antiikin trigonometria

Nykyisin *trigonometriaksi* kutsuttavan opin ensi vaiheet sattuvat hellenistiselle kaudelle. Tähtitieteilijät *Hipparkhos* (180[?]–125 eKr.) ja *Klaudios Ptolemaios* (85[?]–165 jKr.), nerokkaan joskin virheellisen maakeskisen maailmanjärjestyksen esittäjä, laativat taulukoita eri keskuskulmia vastaavien jänteiden pituuksista, siis trigonometrian taulukoiden edeltäjiä. Ptolemaioksen *Syntaxis Mathematica*- ja *Almagest*-nimillä tunnettuun pääteokseen sisältyy trigonometristen taulukoiden laatimisperusteiden kuvaus. Ptolemaios laski taulukkoarvot ”helppojen” kulmien perusteella käyttäen apuna lauseita, joka mahdollistivat puolta kulmaa ja kahden kulman summaa vastaavien jänteiden laskemisen. Tällainen on *Ptolemaioksen lause*, jonka mukaan jännenelikulmion $ABCD$ janoille pätee

$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$. Lause on helppo todistaa valitsemalla AC:n piste E, jolle $\angle ABE = \angle DBC$; silloin kolmiot ABE ja DBC sekä ABD ja ECB ovat keskenään yhdenmuotoisia. Yhdenmuotoisuuksista seuraa $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{DC}$ ja $\dfrac{CE}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$ ja edelleen $AB \cdot DC + AD \cdot BC = BD \cdot (AE + EC) = BD \cdot AC$.



Ptolemaioksen lause

Tarkastelemalla jännenelikulmioita, joiden yksi sivu tai lävistäjä on ympyrän halkaisija, Ptolemaios sai helposti lausekkeet kahden kulman summaa ja erotusta vastaavan jänteen pituudelle samoin kuin puolta kulmaa vastaavan jänteen pituudelle. $60°$:een ja $36°$:een kulmia vastaavat jänteet voidaan laskea geometrisesti, ja erotusten sekä puolitusten kautta saadaan $24°$:een, $12°$:een, $6°$:een, $3°$:een, $90'$:n ja $45'$:n kulmia vastaavat jänteet. Yksinkertainen approksimointi, joka perustuu siihen, että pieniä kulmia vastaavat jänteet suhtautuvat suunnilleen kuten kulmat, johtaa sitten $1°$:een kulman jänteeseen ja puolitus $30'$:n kulman jänteeseen. Kulmien yhteenlaskukaavan avulla saadaan kaikki muut jänteet puolen asteen välein.

Antiikin trigonometria syntyi tähtitieteen tarpeisiin. Se oli nykyisen luokituksen mukaan *pallotrigonometriaa*. Esimerkiksi maanmittauksen tarvitsemaa tasotrigonometriaa ei varsinaisena oppina tunnettu, vaikka jännetaulukkojen implisiittisesti sisältämät sini- ja kosinifunktion arvot olisivatkin mahdollistaneet tasokolmioiden ratkaisemisen. Ensimmäisen systemaattisen pallotrigonometrian esityksen kirjoitti *Menelaos* (noin 100 jKr.). Kreikkalaisten trigonometria ei tuntenut meidän "trigonometrisia funktioitamme"; kolmioiden ja pallokolmioiden ratkaisut esitettiin puhtaasti geometrian keinoin. Menelaoksen aikalainen *Heron* (noin 75 jKr.) kirjoitti kuvioiden pinta-aloista ja tilavuuksista. Kolmion alan S sivujen ja piirin puolikkaan p avulla ilmaisevan *Heronin kaavan*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

sisältö lienee ollut tuttu jo Arkhimedeelle.

5 Matematiikkaa keskiajalla

Antiikin matematiikka alkoi sammua muun antiikin kulttuurin myötä ajanlaskumme ensimmäisinä vuosisatoina. Tuon ajan matemaattiset tekstit ovat enimmäkseen kommentaareja, uusia tuloksia syntyy enää vähän. Viimeinen merkittävä antiikin matemaatikko on aleksandrialainen *Pappos* (noin 320), jonka *Matemaattinen kokoelma* -teoksen sitaateissa on säilynyt useiden kymmenien antiikin geometrikkojen tekstejä. – Aleksandrialainen oli myös ensimmäinen nimeltä tunnettu naismatemaatikko *Hypatia* (370[?]–415; ”kauneudestaan, siveydestään ja opistaan kuuluisa naisfilosofi –” Iso tietosanakirja, 1932). Hypatian tuotanto on kommenttiluonteista. Hän kärsi marttyyrikuoleman kristittyjen käsissä kieltäydyttyään luopumasta pakanallisista käsityksistään.

Rooman keisarikunnan läntinen osa luhistui 400-luvulla. Roomalainen valtiomies, itägoottilaisten keisarien neuvonantaja ja filosofi *Boëthius* (480–524) kirjoitti muutamia jokseenkin alkeellisia oppikirjoja, jotka kuitenkin edustivat seuraavien vuosisatojen ajan korkeinta matematiikkaa länsimailla. Itä-Rooman alueella oli edelleen jonkin verran matemaattista toimintaa: Konstantinopolin Hagia Sofia -kirkon arkkitehdit *Anthemius Thrallesilainen* (k. 534) ja *Isidoros Miletolainen* (n. 520) olivat myös matemaattisesti sivistyneitä ja mm. kiinnostuneita Arkhimedeen teoksista. Edellisen sanotaan esittäneen ellipsin konstruoinnin kahteen pisteeseen kiinnitetyn langan avulla. Tämän mahdollistavan teoreeman oli esittänyt jo Apollonios. Jälkimmäinen oli viimeinen Platonin Akatemian johtaja. Itä-Rooman keisari *Justinianus* lakkautti akatemian v. 529.

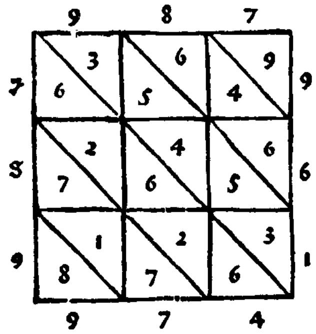
Seuraaviksi vuosisadoiksi matematiikan tutkimus sammui länsimaissa kokonaan ja antiikin aikana löydetyt tulokset jäivät lähes kokonaan unohduksiin. Vaatimatonta matematiikan harrastusta esiintyi koululaitoksen piirissä: keskiajan koulun oppiaineisiin, ”seitsemään vapaaseen taiteeseen” kuuluivat, pythagoralaisen esikuvan mukaan, mm. aritmetiikka ja geometria. Matematiikan opetus rajoittui kuitenkin aivan alkeisiin. Vasta renessanssin aikana alkaa länsimainen matematiikka uudelleen elpyä. Matematiikan kehityksen painopiste sijaitsee neljännestä kolmanteentoista vuosisataan ensin intialaisen ja sitten islamin kulttuurin piirissä.

5.1 Intia

Matematiikka on sanskriitiksi *ganita*, laskemisen taito. Keskiajan intialainen matematiikka liittyy selkeästi babylonialaiseen aritmeettis-algebralliseen traditioon. Intialaisen matematiikan merkittävin anti lienee lukujen kymmenjärjestelmään perustuva merkitseminen ns. arabialaisilla numeroilla, siis nykyinen normaali merkintätapamme. Kaikki kymmenjärjestelmän ainekset löytyvät kyllä yksittäin aikaisemmista kulttuureista, mutta muualla (paitsi Kiinassa, jossa käytetyt ”sauvanumerot” noudattivat oikeastaan 100-kantaista paikkajärjestelmää) niitä ei yhdistetty. Vanhimmat viittaukset hindulaiseen kymmenjärjestelmään löytyvät *Aryabhatan* (noin 500 jKr.) runomuotoisesta astronomis-matemaattisesta teoksesta *Aryabhatija*; varhaisin todella säilynyt esimerkki kymmenjärjestelmällä merkitystä luvusta – luku on 346 – on vuodelta 595. Nolla tuli kuitenkin käyttöön numeroiden merkinnässä vasta myöhemmin – itse asiassa vanhin Intiasta tunnettu 0-symbolin esiintymä on vasta 800-luvulta. Usein kuultu lause ”intialaiset keksivät nollan” on hiukan epätarkka. Babylonialaista nollasymbolia ei kuitenkaan koskaan sijoitettu viimeiseksi numeroksi, joten nollan täysin nykykäsityksiä vastaava käyttö on todella peräisin hinduilta.

Tarkkaa selkoa kymmenjärjestelmään olennaisesti liittyvien laskualgoritmien alkuperästä ei ole. On esitetty perusteltuja olettamuksia, joiden mukaan sittemmin (1200-luvulta alkaen) ennen muuta Italiassa julkaistuissa laskuoppaissa esiintyvät metodit kuten *gelosia*-kertolasku ja *galeoni*- tai *batello*-jakolasku olisivat alkuaan intialaisia. Nykyiset algoritmit ovat olennaiselta sisällöltään samat, vaikka numeroiden sijoittelussa laskukaavioihin onkin tapahtunut (ja tapahtuu edelleen!) muutoksia.

Gelosia-kertolaskulla $987 \cdot 987 = 974169$ järjestyy näin



ja galeoni-jakolaskulla

$$\frac{78963}{245} = 322 + \frac{73}{245}$$

näin:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \cancel{1} & & & & & & \\
 & & & & & \cancel{1} & \cancel{5} & 7 & & & & & \\
 & & & & & \cancel{5} & \cancel{4} & \cancel{6} & 3 & & & & \\
2 & 4 & 5 & | & \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{9} & \cancel{6} & \cancel{3} & | & 3 & 2 & 2 \\
 & & & & \cancel{7} & \cancel{3} & \cancel{5} & \cancel{0} & \cancel{0} & & & & \\
 & & & & & \cancel{4} & \cancel{9} & \cancel{9} & & & & & \\
 & & & & & & \cancel{4} & & & & & &
\end{array}$$

Kymmenjärjestelmän ohella toinen pysyvään ja yleiseen käyttöön jäänyt intialainen innovaatio on trigonometrian *sinifunktio*: intialaisten tähtitieteilijöiden ajanlaskumme alkuvuosisatoina laatimiin *Siddhanta*-nimisiin runomuotoisiin esityksiin liittyi kaksinkertaisen kulman jänteen puolikkaan taulukoita. Intialaiset taulukot noudattivat kulmajakoa $3°45'$; tarkemmat arvot interpoloitiin. Ptolemaioksen taulukko oli käyttänyt vastaaviin tarkoituksiin koko kulmaa vastaavia jänteitä. Nimitys *sini*, latinan *sinus*, johtuu väärinkäsityksestä: sanskritin jänteen puolikasta tarkoittava *jya-ardha* vääntyi arabiaan muodossa *jiba*. 1100-luvun kääntäjä luki termin virheellisesti muodossa *jaib*. Tämä sana tarkoitti lahtea, rintaa tms. kaarevaa objektia kuten latinan *sinus*.

Huomattavin varhaiskeskiajan matematiikko oli *Brahmagupta* (noin 625). Intialaiselle matematiikalle tyypilliseen tapaan hänen tuotantonsa oli epätasaista: oikeat ja vähemmän oikeat tulokset esiintyvät rinta rinnan, esim. ympyrän kehän ja halkaisijan suhteen arvot $\sqrt{10}$ ja 3. Tunnettu Heronin kaavalle analoginen *Brahmaguptan kaava* nelikulmion pinta-alalle S,

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

(s on nelikulmion piirin puolikas) pätee itse asiassa vain ympyrän sisään piirrettyihin eli jännenelikulmioihin.

Merkittävin Brahmagupta oli aritmeetikkona: hän käytti ensimmäisenä nollaa ja negatiivisia lukuja johdonmukaisesti. Nolla on tässä ymmärrettävä lukuna, ei numerona. Mm. sellainen sääntö kuin "negatiivinen kertaa negatiivinen on positiivinen" oli Brahmaguptalle tuttu. Toisen asteen yhtälöllä saattoi olla kaksi ratkaisua silloinkin, kun ratkaisut eivät olleet positiivisia. Brahmagupta ja hänen aikalaisensa Intiassa käyttivät sumeilematta myös irrationaalilukuja välittämättä niihin sisältyvistä loogisista vaikeuksista. Brahmagupta käytti kirjoituksissaan Diofantoksen tavoin eräänlaista algebrallista symbolismia. Brahmaguptan ansiolistaan kuuluu vielä ensimmäisen asteen Diofantoksen yhtälön $ax + by = c$ täydellinen kokonaislukuratkaisu. Jos c on jaollinen a:n ja b:n suurimmalla yhteisellä tekijällä, yhtälön yksittäisratkaisu löytyy Eukleideen algoritmia soveltamalla ja jos (x_0, y_0) on yksittäisratkaisu, niin myös parit $(x_0 - bt, y_0 + at)$ ovat ratkaisuja. Diofantos itse oli tyytynyt eri tehtävissä vain rationaalisiin yksittäisratkaisuihin.

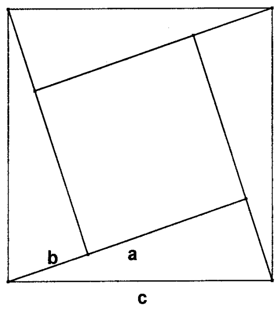
Erityisen ansiokkaita intialaiset olivat *Pellin yhtälöiden* $x^2 - Dy^2 = 1$, D ei neliöluku, ratkaisemisessa. (Yhtälötyypin nimi johtuu 1600-luvulla eläneestä englantilaisesta *John Pellistä*, jonka on arveltu tutkineen tämänlaatuisia yhtälöitä; tieto on kuitenkin epävarma.) Brahmagupta havaitsi, että jos $x^2 - Dy^2 = a$ ja $t^2 - Du^2 = b$, niin $x'^2 - Dy'^2 = (xt + Dyu)^2 - D(xu + yt)^2 = (x^2 - Dy^2)(t^2 - Du^2) = ab$. Tietoa saattoi käyttää hyväksi osoittamaan, että yhdestä Pellin yhtälön ratkaisusta voi generoida äärettömän monta muuta. Lisäksi jos x':lla ja y':lla on yhteinen tekijä, se voidaan supistaa, ja mahdollisesti päästä löytämään tarvittava yksittäisratkaisu.

Viimeinen huomattava keskiajan intialaismatemaatikko oli *Bhaskara* (1114–85). Bhaskara kehitti nerokkaan *chakravala*-menetelmän, jolla Pellin yhtälön yksittäisratkaisu voitiin löytää. Hän ratkaisi yhtälön $x^2 = 1 + py^2$ tapauksissa $p = 8$, 11, 32, 61 ja 67. Esimerkiksi yhtälön $x^2 = 1 + 61y^2$ ratkaisu on $x = 1\,766\,319\,049$, $y = 226\,153\,980$. Bhaskara on tiettävästi ensimmäinen, joka on kiinnittänyt huomiota nollalla jakamisen mahdottomuuteen. Intialaisten nokkelaa laskemista irrationaaliluvuilla edustaa Bhaskaran havainto $\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{(3 + 12) + 2\sqrt{3 \cdot 12}} = 3\sqrt{3}$.

Bhaskara on kuuluisa myös yksisanaisesta (*Katso!*) Pythagoraan lauseen todistuksestaan, joka perustuu siihen, että c-sivuinen neliö voidaan jakaa neljäksi suorakulmaiseksi kolmioksi, joiden kateetit ovat a ja b, sekä $a-b$-sivuiseksi neliöksi; $c^2 = 2ab + (a-b)^2 = a^2 + b^2$.

5.2 Islamin matematiikka

Islamin perustaja profeetta *Muhammed* kuoli vuonna 632. Noin sata seuraavaa vuotta islam oli sotaisessa ekspansiovaiheessa, mutta kahdeksannen vuosisadan puolivälistä alkaen



Katso!

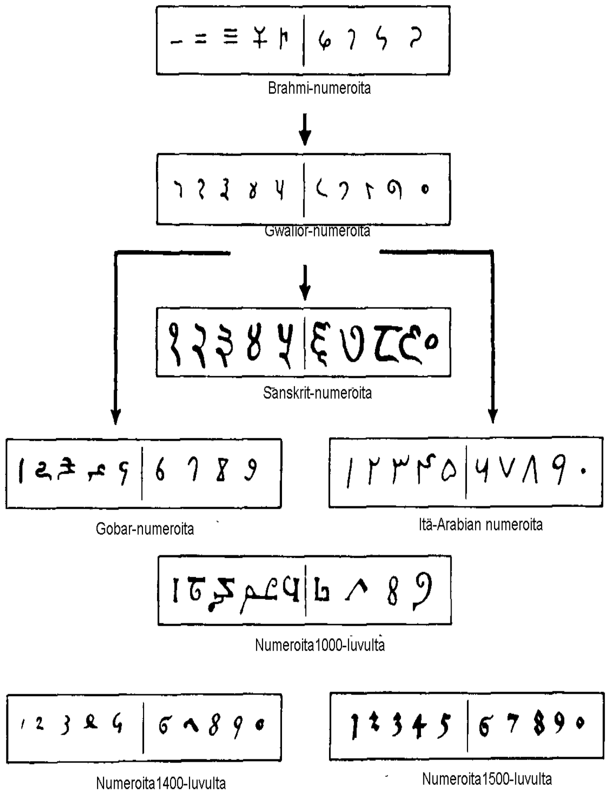
islamilaisvaltioiden johtajat alkoivat suhtautua myönteisemmin myös kulttuuriin. Erityisesti kalifikunnan keskuksessa Bagdadissa ja sinne perustetussa Aleksandrian Museionia muistuttaneessa *Bait al Hikmassa* eli *Viisauden talossa* tutkittiin ja käännettiin arabiaksi kreikkalaisia käsikirjoituksia, ja myös kosketuksia Intiaan hyödynnettiin.

Matematiikan historian kannalta islamin kulttuurin suurimpana ansiona pidetään toisaalta antiikin perinnön tallettamista ja toisaalta intialaisen aritmetiikan omaksumista ja edelleen välittämistä. Ajatus on jossain määrin islamin kulttuurin monia tieteellisiä saavutuksia väheksyvä. Joissain tapauksissa arabialainen panos näkyy vain tuotteen nimessä: esim. Klaudios Ptolemaioksen tähtitieteellinen pääteos, jonka vaikutus keskiajan maailmankuvaan oli erittäin ratkaiseva, tunnetaan yleisesti arabiankielisellä nimellään *Almagest.* – On myös huomattava, että islamin kulttuuripiiri oli maantieteellisesti laaja ja sisälsi monia kansallisuuksia ja kieliä. Yhdistävä tekijä oli uskonto ja sivistyksen yhteinen kieli arabia.

Merkittävimmin arabimatemaatikoista on jälkimaailmaan vaikuttanut *Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi* (780[?]–850[?]). (Nimen ortografia vaihtelee eri lähteissä. Vaihtelu selittyy osin siitä, että arabian kielessä vain konsonantit merkitään.) Al-Khwarizmi kirjoitti tähtitieteestä, mutta tärkeimmät hänen teoksistaan ovat aritmetiikan ja algebran oppikirjat. Edellinen on säilynyt vain latinankielisenä käännöksenä *De numero indorum.* Siinä selvitetään intialaisen kymmenjärjestelmän käyttö. Arabian kielen kirjoitus ei sinänsä tuntenut erityisiä numeromerkkejä, vaan numerot ilmaistiin kirjaimin. Teoksen osin huolimattomat latinalaiset käännökset ovat syypäitä nimitykseen *arabialaiset numerot*, vaikka Al-Khwarizmi itse ei mitenkään peittele lähteitään. Intialaiset numerot esiintyivät islamin kulttuurin piirissä kahtena eri versiona; Eurooppaan päätyivät ns. *gobar*-numerot, joita käytettiin alueen läntisemmissä osissa. – Vielä nykyäänkin arabian kielessä on käytössä kaksi eri numeromerkkisarjaa, joista pohjoisafrikkalainen on lähempänä meidän käyttämiämme merkintöjä. On huomattava, että kymmenjärjestelmään liittyvä kymmenmurtolukujen kirjoitus desimaalierottimineen on tullut käyttöön huomattavasti myöhemmin, renessanssin aikana.

Intialaisilla numeroilla laskemista ryhdyttiin Al-Khwarizmin nimen perusteella kutsumaan *algorismiksi*; *algoritmi*-sanan nykymerkitys on samaa perua.

Al-Khwarizmin tärkein teos oli *Al-jabr wa'l muqabalah.* Kirjan nimen ensimmäinen sana, 'jälleenyhdistäminen', tarkoittaa toimenpidettä, jossa yhtälön toiselta puolelta siir-



Intialais-arabialaisen numerojärjestelmän versioita

retään negatiivinen termi toiselle puolelle ja muutetaan se samalla positiiviseksi (esim. $x^2 = 40x - 4x^2 \to 5x^2 = 40x$). Jälkimmäinen nimen osa tarkoittaa yhtälön eri puolilla olevien positiivisten termien yhdistämistä (esim. $50 + x^2 = 29 + 10x \to 21 + x^2 = 10x$). Tästä on syntynyt nimi *algebra.* Al-Khwarizmin oppikirjan pääsisältönä on toisen asteen yhtälön ratkaiseminen sekä algebrallisesti että geometrisesti. Algebrallinen ratkaisu on olennaisesti sama kuin nykyisin, siis neliöksi täydentäminen ja neliöjuuren otto. Geometrisia ratkaisuja tarvitaan useita sen mukaan, miten (nykymerkinnöin) kertoimien etumerkit jakautuvat. Tyypillisessä tehtävässä $x^2 + 10x = 39$ piirretään neliö, jonka sivu on x, sen kullekin sivulle suorakaide, jonka korkeus on $\frac{10}{4}$. Syntyneen ristinmuotoisen kuvion ala on 39. Kun siihen liitetään neljä sivultaan $\frac{10}{4}$ olevaa neliötä, saadaan neliö, jonka ala on $39 + 25 = 64$ ja jonka sivu on $x + 5$. Mutta tästä nähdään, että $x = 3$. Toisin kuin intialaiset Al-Khwarizmi hyväksyy vain positiiviset juuret. Koko esitys on lisäksi puhtaasti sanallista, Diofantoksen ja Brahmaguptan tuntemia symboliikan alkeita ei käytetä. – Aina 1800-luvulle asti algebralla ymmärrettiin matematiikassa nimen omaan oppia polynomiyhtälöiden ratkaisemista.

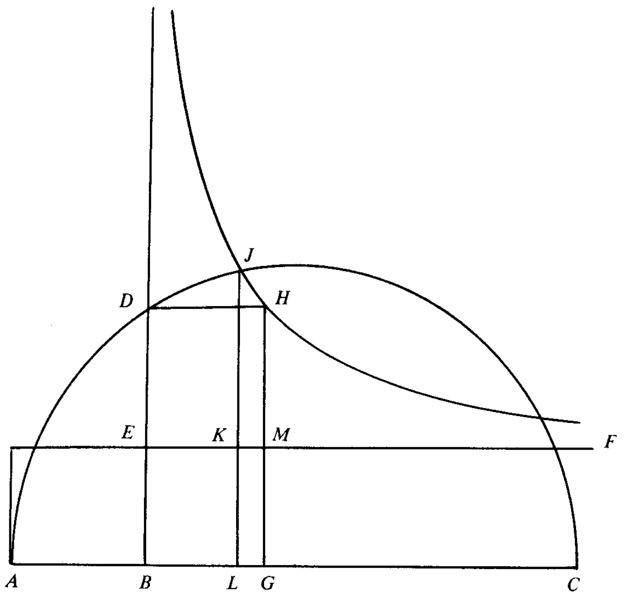
Al-Khwarizmin ohella 800-luvun merkittävin matemaatikko oli *Thabit-ibn-Qurra* (826–901), joka toimitti mm. Eukleideen, Arkhimedeen, Apollonioksen ja Ptolemaioksen tekstien käännöksiä arabiaksi. Käännökset sisälsivät usein Thabitin omia täydennyksiä ja parannuksia. Thabit esitti myös mielenkiintoisen ystävällisten lukuparien konstruktion: jos p, q ja r ovat parittomia alkulukuja sekä muotoa $p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ ja $r = 3^2 \cdot 2^{2n-1} - 1$, niin $2^n pq$ ja $2^n r$ ovat pythagoralaisten mielessä ystävällinen lukupari: kumpikin on toisen tekijöiden summa.

Arabialaiset omaksuivat kreikkalaisesta matematiikasta mieluummin laskennallisia ja käytäntöön liittyviä kuin aksiomaattis-deduktiivisia aineksia. Niinpä geometrian osa-alueista tähtitiedettä palveleva trigonometria kehittyi islamin piirissä pisimmälle, melko lähelle nykymuotoaan. Arabitähtitieteilijät omaksuivat Intiasta sinifunktion ja ottivat itse käyttöön tangenttifunktion. Huomattavin trigonometrian kehittäjä oli *Abu'l-Wefa* (940–97), joka laski kahdeksan desimaalin tarkkuutta vastaavan sinitaulukon kulmille 15':n välein, tunsi pallotrigonometrian sinilauseen ja käytti jossain määrin kaikkia kuutta trigonometrista funktiota.

Islamin kukoistuskauden viimeiset suuret matemaatikot ovat suuren yleisön keskuudessa runoilijana paremmin tunnettu, Persian Khorasanissa vaikuttanut *Omar Khaijam* (1050[?]–1123) (kokoelmat *Teltantekijän lauluja* ja *Viisaan viini* on suomennettu, hiljattain myös valikoima *Khaijamin lauluja*, johon on pyritty saamaan varmimmin hänen kirjoittamikseen arveltuja tekstejä); uskonnollisesti Omar oli lähinnä ateisti) ja mongolihallitsija Hulagu-kaanin hoviastronomi *Nasir Eddin al-Tusi* (1201–74). Omar kirjoitti algebran esityksen, jossa tutkitaan systemaattisesti kolmannen asteen yhtälöitä. Jo Menaikhmos ja Arkhimedes olivat ratkaisseet kartioleikkausten avulla kolmannen asteen yhtälöitä erikoistapauksissa, mutta Omar esitti yleisen geometrisen ratkaisun (itse asiassa suuren joukon eri geometrisia ratkaisuja kertoimien eri merkkikombinaatioiden mukaan). Omar ei uskonut, että yleinen kolmannen asteen yhtälö voitaisiin ratkaista algebrallisesti.

Omarin ratkaisu kolmannen asteen yhtälölle $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$ on seuraava: Määritetään verrannosta $\dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{d}$ d ja verrannosta $\dfrac{b}{d} = \dfrac{a}{e}$ e. Silloin $e = \dfrac{a^3}{b^2}$. Piirretään jana $AB = e$ ja erotetaan suoralta AB jana $BC = c$. Piirretään B:n kautta kohtisuora AC:tä vastaan ja erotetaan siltä $BE = b$. Piirretään AC halkaisijana ympyrä, joka leikkaa BE:n pisteessä D. Erotetaan säteeltä BC jana BG siten, että $\dfrac{ED}{BE} = \dfrac{AB}{BG}$. Täydennetään DBG suorakaiteeksi $DBGH$. Piirretään E:n kautta AC:n suuntainen suora, joka leikkaa GH:n pisteessä M. Piste H ja suorat ED ja EM määrittävät hyperbelin, niiden pisteiden P uran, joiden näistä suorista laskettujen etäisyyksien tulo on $DH \cdot MH$. Piirretty puoliympyrä leikkaa tämän hyperbelin pisteessä J. Pisteestä J suoria EM ja AC vastaan piirretty kohtisuora leikkaa EM:n pisteessä K ja suoran AC pisteessä L. Hyperbelin ominaisuuden ja pisteen G valinnan nojalla $EK \cdot KJ = EM \cdot MH = BG \cdot ED = BE \cdot AB$ ja $BL \cdot LJ = EK \cdot (BE + KJ) = EK \cdot BE + BE \cdot AB = BE \cdot AL$. Siis $BL^2 \cdot LJ^2 = BE^2 \cdot AL^2$. Mutta puoliympyrän tunnetun ominaisuuden nojalla $LJ^2 = AL \cdot LC$. Siis $BL^2 \cdot AL \cdot LC = BE^2 \cdot AL^2$ eli $BE^2 \cdot AL = BL^2 \cdot LC$. Edelleen $BE^2(BL + AB) = BL^2(BC - BL)$. Mutta tässä olevat janat (paitsi BL) perustuvat kaikki yhtälön kertoimien perusteella tehtyihin valintoihin. On tullut osoitettua, että $b^2\left(BL + \dfrac{a^3}{b^2}\right) = BL^2(c - BL)$ eli $BL^3 + b^2 \cdot BL + a^3 = c \cdot BL^2$. Yhtälön ratkaisu on $x = BL$.

Sekä Omar että Nasir yrittivät vakavasti löytää todistusta Eukleideen viidennelle postulaa-



Kolmannen asteen yhtälön geometrinen ratkaisu

tille, paralleeliaksioomalle. Nasirin ansioita on lisäksi ensimmäinen astronomiasta irrotettu taso- ja pallotrigonometrian yleisesitys.

Viimeinen mainittava islamilainen matemaatikko on *Al-Kashi*, joka toimi Samarkandissa 1400-luvun alkupuoliskolla. Al-Kashi oli taitava laskija, jolla oli merkitystä desimaalilukujen käyttöön tulolle (vaikka hän itse käytti vielä mielellään – ajan tavan mukaan – seksagesimaalimurtolukuja tarkoissa laskuissa). Al-Kashin laskema π:n 16-desimaalinen arvo säilyi kauan tarkkuusennätyksenä.

5.3 Kiina

Kiinassa oli käytössä eräänlainen kymmenjärjestelmä jo ajanlaskumme alun aikoihin. Siinä numeroille 1:stä 9:ään oli kullekin kaksi merkkiä, ja kirjoitettaessa joka toinen numero valittiin ensimmäisestä ja joka toinen toisesta sarjasta. Nollasymbolia ei alkuun tunnettu. Negatiivisen ja positiivisen luvun ero oli selvillä jo melko varhain. Positiiviset luvut kirjoitettiin punaisina, negatiiviset mustina.

Jo ajanlaskumme kolmannella vuosisadalla kirjoitetussa teoksessa *Jiuzhang suanshu* (Laskusäännöt yhdeksässä luvussa), jonka tekijä on *Liu Hui*, esiintyy usean tuntemattoman lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu eliminointimenetelmällä. Yhtälöiden kertoimet on sijoitettu "matriisin" pystyriveiksi, joilla operoidaan samoin kuin matriisin vaakariveillä nykyisin Gaussin eliminoinniksi kutsutussa metodissa.

Myös Kiinassa laskettiin keskiajalla tarkkoja π:n likiarvoja: *Zu Chongzhi* (430 – 501) pääsi tulokseen $3,1415926 < \pi < 3,1415927$. Kiinalaista alkuperää on sittemmin englantilaisen *W. G. Hornerin* (1786–1837) mukaan nimetty menetelmä algebrallisen yhtälön $P(x) = 0$ likimääräiseksi ratkaisemiseksi: jos x_0 on likimääräinen ratkaisu, niin sijoitus $x = x_0 + y$ johtaa uuteen yhtälöön $P_1(y) = 0$, jolla on pieni juuri y; koska y:n korkeammat potenssit ovat pieniä, tälle uudelle yhtälölle voidaan helposti antaa approksimaatio y_0 jne. Menetelmän, jonka kiinalainen nimi on *fan fa*, esitti ainakin *Qin Jiushao* (noin 1247). Sen laskennollinen toteutus, jonka voi katsoa perustuvan polynomin $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots a_1x + a_0$ kirjoittamiseen muotoon $x(x(\ldots(x+a_{n-1})+a_{n-2})\cdots+a_1)+a_0$, on erityisen kätevä. Ratkaistaan likimääräisesti yhtälö $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$. Havaitaan, että 2:n ja 3:n välissä on nollakohta. Laskukaavion

$$\begin{array}{cccc}
1 & 2 & -5 & -10 \\
 & \underline{+2} & \underline{+8} & \underline{+6} \\
 & 4 & 3 & -4 \\
 & \underline{+2} & \underline{+12} & \\
 & 6 & 15 & \\
 & \underline{+2} & & \\
 & 8 & &
\end{array}$$

avulla saadaan polynomi uuden muuttujan $y = x - 2$ avulla: $y^3 + 8y^2 + 15y - 4$. Tämän polynomin eräs nollakohta on välillä $(0, 1)$; polynomilla $y^3 + 80y^2 + 1500y - 4000$ on nollakohta välillä $(2, 3)$. Laskukaavio

$$\begin{array}{cccc}
1 & 80 & 1500 & -4000 \\
 & \underline{+2} & \underline{+164} & \underline{+3328} \\
 & 82 & 1664 & -672 \\
 & \underline{+2} & \underline{+168} & \\
 & 84 & 1832 & \\
 & \underline{+2} & & \\
 & 86 & &
\end{array}$$

merkitsee, että on tehty uusi sijoitus $y = x + 2$ ja saatu polynomi muotoon $x^3 + 86x^2 + 1832x - 672$. Tämän polynomin likimääräinen juuri on $x = \dfrac{672}{1832} = 0{,}37$. Alkuperäisen yhtälön likimääräisratkaisu on siten $x = 2{,}237$. – Koska $x^3+2x^2-5x-10 = (x+2)(x^2-5)$, juuren tarkka arvo on $\sqrt{5} \approx 2{,}236$.

Qinin kirjoituksista löytyy myös syvällinen todistus lukuteoriaan kuuluvalle ns. *kiinalaiselle jäännöslauseelle*: on olemassa luku, jota annetuilla luvuilla jaettaessa saadaan annetut jakojäännökset. *Jang Hui* (n. 1270) esitti kaavan n:n ensimmäisen neliöluvun summalle ja binomikerroinkaavion, jonka tunnemme *Pascalin kolmiona*.

Ensimmäiset painetut matemaattiset kirjat ilmestyivät Kiinassa vuoden 1100 paikkeilla. Kiinalaisen osin ilmeisesti hyvin korkeatasoisen matematiikan yhteydet muihin kulttuureihin olivat niukat, eikä Kiinan suoraa vaikutusta matematiikan kehitykselle muualla voi selvästi osoittaa.

5.4 Eurooppa varhaiskeskiajalla

Kreikkalainen traditio säilyi jossakin määrin bysanttilaisen kulttuurin piirissä toiselle vuosituhannelle asti: joitakin kommentaareja ja oppikirjanomaisia esityksiä kirjoitettiin. Länsi-Euroopassa oli matematiikan taso Rooman valtakunnan hajoamisen jälkeen erittäin alhainen. Kreikan kieli, jolla suurin osa antiikin matematiikkaa oli kirjoitettu, oli jokseenkin kokonaan unohdettu. Vaikka *Kaarle Suuren* aikana (noin 800) tehtiin joitakin yrityksiä koululaitoksen kehittämiseksi, ei matematiikassa ylitetty alkeisaritmetiikan tasoa. Huomattavimmat matemaattiset yritykset koskivat kalenterin liikkuvien juhlapyhien määritystä. Oli toivottavaa, että joka luostarissa olisi ollut yksi kalenterilaskuja taitava munkki. Katolisen kirkon asenne tietoon ja tieteeseen oli muuten pääosin torjuva, vaikkakin matematiikalla arveltiin olevan arvoa teologiseen päättelyyn harjaannuttamisessa. Astrologia – ja siihen sidoksissa ollut lääkintätaito – tarvitsi tuekseen hiukan astronomiaa ja laskutaitoa. Ns. pimeän keskiajan merkittävimpiä matematiikan harrastajia on ranskalaissyntyinen *Gerbert* (940[?]–1003), sittemmin paavi *Sylvester II*, joka tiettävästi ensimmäisenä länsimaalaisena käytti intialais-arabialaisia numeroita.

Matematiikan harrastus länsimaissa alkoi jossain määrin elpyä 1100- ja 1200-luvuilla. Tuolloin lännessä ruvettiin omaksumaan islamilaisessa maailmassa tunnettua tietoa ja kääntämään sekä kreikkalaista alkuperää olevia että varsinaisia arabialaisia tekstejä latinaksi. Suoraan kreikasta ei käännetty mitään ennen 1400-lukua. Tietoa suodattui eniten Espanjan kautta; etenkin monikansallinen Toledon kaupunki oli merkittävä portti islamilaisen ja kristillisen maailman välillä. Sotaisten ristiretkien merkitys tiedon siirrossa ei sitä vastoin varmaankaan ole ollut niin suuri kuin usein esitetään.

Ensimmäinen merkittävä matematiikan kääntäjä oli Bathissa Englannissa vaikuttanut *Adelard* (1075–1160), joka mm. käänsi Eukleideen Alkeet arabiasta latinaksi. Työteliäin kääntäjä lienee ollut Toledossa työskennellyt *Gerard Cremonalainen* (1114–87), jonka ainakin 85 nimikettä sisältävä käännöstöiden luettelo sisältää mm. Ptolemaioksen Almagestin ja Al-Khwarizmin kirjoituksia. (Aikaisemmin mainittu *sini*-väärinkäsitys sattui juuri Gerardille.) Yleensä kiinnostus kohdistui pikemminkin aritmeettis-algebrallisen tradition mukaisiin teoksiin kuin vaikeampaa geometrista perinnettä edustaviin käsikirjoituksiin.

5.5 Fibonacci

Ensimmäinen itsenäisenä matemaatikkona merkittävä länsimaalainen oli *Leonardo Pisano* eli *Fibonacci* (1180[?]–1250), jonka kuuluisa teos *Liber abbaci*[1] (1202, toinen laitos 1227) oli (helmitaulun kaltaiseen *abakukseen* liittyvästä nimestään huolimatta; nimenomaan abakusta Leonardo ei kirjassaan käsittele) ensimmäisiä kymmenjärjestelmän aritmetiikan oppaita. Leonardo oli Pohjois-Afrikassa toimineen kauppaedustajaisänsä seurassa tutustunut arabialaisten numeroiden käyttöön. Kymmenjärjestelmän yhtä olennaista piirrettä, murtolukujen desimaalimerkintää, Leonardo ja hänen aikalaisensa eivät oivaltaneet. Leonardo käytti omaperäistä murtolukumerkintää: $\dfrac{1\ 2\ 3}{5\ 10\ 20}$ tarkoitti lukua $\dfrac{1}{5\cdot 10\cdot 20}+\dfrac{2}{10\cdot 20}+\dfrac{3}{20}$. Vaikeatajuisena pidetty kymmenjärjestelmä herätti vastustusta ja pelkoja. Vuonna 1299 Firenzessä annetussa säädöksessä rahanvaihtajia kiellettiin käyttämästä kymmenjärjestelmää. Osasyy intialais-arabialaisten numeroiden vierastamiseen saattoi olla niiden kirjoitusasun vakiintumattomuus ja siitä johtuneet sekaannukset.

Vaikka Liber abbacin matemaattinen taso ei kovin korkea olekaan, sen on tehnyt kuolemattomaksi kuuluisa tehtävä:

> Kuinka monta kaniiniparia syntyy vuodessa, jos vuoden alussa on yksi pari ja

[1] Muoto *abaci* esiintyy toisissa lähteissä.

jokainen pari synnyttää joka kuukausi uuden parin, joka alkaa synnyttää kahden kuukauden kuluttua?

Koska tehtävän mukaan tammikuun alussa pareja on 1, helmikuun alussa 2, maaliskuun alussa 3, huhtikuun alussa nämä kolme ja alkuperäisen parin ja tammikuussa synnyttäneen parin jälkeläiset, siis yhteensä 5 jne, nähdään, että parien lukumäärän ilmoittaa palautuskaavaa

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

Tätä kaavaa alkuarvoilla $a_1 = a_2 = 1$ noudattavaa lukujonoa kutsutaan *Fibonaccin jonoksi* ja sen jäseniä *Fibonaccin luvuiksi*. Päättymättömyys oli esillä jo Fibonaccin omassakin ratkaisussa joka numeerisen (377 paria seuraavan vuoden alussa) ratkaisun ohella sisältää maininnan siitä, että prosessia voi jatkaa miten pitkälle tahansa. Fibonaccin jonon lukuisia mielenkiintoisia ominaisuuksia ja sovelluksia tutkitaan yhä, jopa niin, että jonon harrastajilla on oma, vuonna 1963 perustettu yhdistyksensä ja aikakauskirjansa *The Fibonacci Quarterly*. – Yritteen $a_n = r^n$ avulla huomataan, että Fibonaccin luvut ovat sukua yhtälön $r^2 = r + 1$ ratkaisuille. Itse asiassa

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Tämä merkitsee mm., että peräkkäiset Fibonaccin luvut suhtautuvat toisiinsa likimäärin kuten kultaisen leikkauksen suhteessa olevat suureet. – Leonardo tutki myös Diofantoksen yhtälöitä ja esitti kolmannen asteen yhtälöille likiarvoratkaisuja. Kolmannen asteen yhtälön $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ likimääräinen seksagesimaalimuotoinen ratkaisu $x = 1; 22, 7, 42, 33, 4, 40 = 1{,}368808107853\ldots$ on huomattavan tarkka (tarkempi likiarvo olisi $1{,}368808107821\ldots$) ja antaa aiheen olettaa Fibonaccin käytössä olleen jonkin variantin ”Hornerin menetelmästä”. Oivaltava oli myös Fibonaccin tapa laskea peräkkäisten kuutiolukujen summa: koska kaaviossa

$$\begin{array}{cccc}
1 & & & \\
3 & 5 & & \\
7 & 9 & 11 & \\
13 & 15 & 17 & 19 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

n:nnen rivin lukujen keskiarvo on n^2 ja lukuja on rivillä n kappaletta, kaavion n:n rivin lukujen summa on $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$. Toisaalta kuviolukujen ominaisuuksien perusteella nähdään, että k:n ensimmäisen parittoman luvun summa on k^2 ja että kaavion n:llä rivillä on $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ lukua. Siis $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Leonardon v. 1225 kirjoittama *Liber quadratorum* sisältää useita mielenkiintoisia lukuteoreettisia tuloksia, mm. sen, että kahden neljännen potenssin erotus ei voi olla neliöluku.

5.6 1200- ja 1300-luvut

1200-luvulla Länsi-Euroopan tiede saavutti arabialaisen tason. Perustettiin ensimmäiset yliopistot (Bologna, Pariisi, Oxford . . . ; ensimmäiset kirjalliset maininnat sekä Pariisin että Oxfordin yliopistoista koskevat opiskelijoiden ja viranomaisten välisiä tappeluja), skolastinen filosofia eli huippukauttaan (*Albertus Magnus, Tuomas Akvinolainen*) ja tekniikka edistyi (ruuti ja kompassi tulivat tunnetuiksi). Matematiikassa tietomäärä lisääntyi ennen muuta käännösten avulla (myös Arkhimedes löydettiin uudelleen), mutta joitakin omaperäisiäkin tuloksia syntyi. *Jordanus Nemorarius* (n. 1220) käytti kirjaimia numeroiden sijasta algebrassa ja tuli ensimmäisenä esittäneeksi toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan yleisessä muodossa. Algebrallisen symbolikielen puute pakotti hänet nimeämään jokaisen välituloksen omalla kirjamellaan:

> Olkoon annettu luku abc jaettu osiksi ab ja c ja olkoon osien ab ja c tulo d. Olkoon abc:n neliö e ja olkoon f neljä kertaa d ja olkoon g tulos, kun f vähennetään e:stä. Silloin g on ab:n ja c:n erotuksen neliö. Olkoon h g:n neliöjuuri. Silloin h on ab:n ja c:n erotus. Koska h tunnetaan, c ja ab ovat määrätyt.

Jordanus kirjoitti myös statiikasta, joka oli ajankohtainen goottilaisen arkkitehtuurin huippuaikana. Hän esitti oikein kaltevan tason periaatteen. Hän kuvaili myös opettavan aritmeettisen pelin, *ritmomakian*.

Seuraava vuosisata, kerralla kolmanneksen tai puolet väestöstä vaatineesta ruttoepidemiasta, *mustasta surmasta* kuuluisa 1300-luku, oli edelleen matemaattisesti köyhää. Merkittävin 1300-luvun matemaatikko lienee ranskalainen *Nicole Oresme* (1323[?]–82), kuningas Kaarle V:n hovimies ja lopuksi Lisieux'n piispa Normandiassa. Oresme esitti varsin kehittyneen verranto-opin, jonka yhteydessä hän tuli määritelleeksi (nykykielelle käännettynä) potenssin x^q, missä q on rationaaliluku. Koska $4^3 = 64$ ja $8^2 = 64$, Oresme näki hyväksi kirjoittaa $8 = 4^{1\frac{1}{2}}$. Itse asiassa Oresme merkitsi 8:aa symbolilla $1^p\frac{1}{2}4$. Oresme – kuten useat muutkin skolastikot – pohti muuttuvia suureita. Suureen muutoksen kuvailemiseksi Oresme otti käyttöön olennaisesti tason koordinaatistoa muistuttavat "muotojen latitudit ja longitudit". *Muoto* oli mikä tahansa suure, joka saattoi muuttua, kuten nopeus, kiihtyvyys tai tiheys, ja muodon *latitudi* kuvasi sitä määrää, jolla muoto omasi muuttuvaa ominaisuuttaan. Tasaisella nopeudella liikkuvan esineen nopeuden latitudi oli vaakasuora viiva, tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevan esineen nopeuden latitudi oli nouseva suora. Käsitteet ovat likeistä sukua funktiolle ja sen kuvaajalle. Oresme ei kuitenkaan olennaisesti kyennyt hyödyntämään merkittävää havaintoaan: hän rajoittui lineaarisia funktioita vastaaviin kuvioihin.

Oresmea voi pitää finanssimatematiikan uranuurtajana: hänen 1360 kirjoittamansa rahan olemusta käsittelevä teos selvitteli mm. jalometallikolikoiden arvon muutoksia, kun kolikkojen metalliseoksia huononnetaan.

Oresme ja hänen englantilainen aikalaisensa *Richard Suiseth*, joka tunnetaan myös nimellä *Calculator* (n. 1350) tarkastelivat ja ratkaisivat ongelmia, joissa jouduttiin laskemaan päättymättömien sarjojen summia. (Tosin jo Arkhimedes oli tehnyt samanlaisia päättelyjä.) Oresme jopa totesi harmonisen sarjan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

hajaantumisen, aivan samoin perustein kuin asia nykyäänkin todistetaan. Oresme perusti väitteensä sille, että ensimmäinen termi, kahden seuraavan, neljän seuraavan jne., summa on aina ainakin puoli. – Keskiajan skolastikot raivasivat tavallaan tietä myöhemmälle matemaattiselle analyysille äärettömän suuren ja äärettömän pienen olemusta pohtiessaan. Antiikin matematiikalle nämä käsitteet olivat vieraita.

1300-luvulla vaikutti myös pari merkittävää juutalaista lähtöä ollutta matemaatikkoa, molemmat paavin hallitsemassa juutalaisille suopeassa Avignonissa. *Levi Ben Gerson* (1282–1344) esitti ehkäpä ensimmäisen induktiotodistuksen osoittaessaan, että $n+1$:n alkion permutaatioiden määrä on $n+1$ kertaa n:n alkion permutaatioiden määrä. Levi laski yhden neljäsosa-asteen kulman sinin kahdeksan desimaalin tarkkuutta vastaavasti ja perusti tähän tarkan jännetaulukon. *Immmanuel Ben Jakob Bonfils* (1300-luvun puoliväli) oli tiettävästi ensimmäinen kymmenmurtoluvuista kirjoittanut.

6 Renessanssi

Renessanssin ("uudelleensyntymisen") kiinnostus antiikkiin innosti edelleen myös antiikin matemaattisten klassikkojen käännöksiin. Kaupan tarpeet ja uusi tekniikka, kirjapainotaito, synnyttivät entistä paljon laajempilevikkisen matemaattisen kirjallisuuden, laskuopit. Renessanssin aikana tehtiin myös ensimmäiset todella antiikin matematiikkaa pitemmälle menevät uudet keksinnöt, nimenomaan algebran alalla. Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden algebrallinen ratkaisu oli matematiikan renessanssi-ilmiö.

6.1 Painettuja laskuoppeja ja taulukoita

Keskiajan lopulla Euroopan matematiikan painopiste oli yliopistojen ulkopuolella. Tosin Pariisin yliopistossa oli vuodesta 1336 voimassa sääntö, jonka mukaan tutkintoa ei myönnetty muuta kuin niille opiskelijoille, jotka valaehtoisesti tunnustivat kuunnelleensa Eukleideen Alkeiden ensimmäisiä kirjoja koskeneita luentoja.

Yleensä itseoppineet *laskumestarit* levittivät tietoa käytännön elämään kuten kauppaan, kirjanpitoon ja merenkulkuun liittyvästä aritmetiikasta ja algebrasta. Kirjapainotaidon keksiminen 1400-luvun keskivaiheilla ei välittömästi merkinnyt kovin suurta mullistusta matematiikassa. 1400-luvun merkittävin matemaatikko, saksalainen *Johannes Müller* alias *Regiomontanus* (1436–76) tosin omisti Nürnbergissä kirjapainon, mutta ennenaikainen kuolema Roomassa, jossa Regiomontanus oli suunnittelemassa kalenteriuudistusta, esti häntä toteuttamasta laajoja suunnitelmiaan kääntää tärkeimmät matematiikan klassikkojen teokset suoraan kreikasta latinaksi ja painaa ne. (Konstantinopolin joutuminen turkkilaisten käsiin v. 1453 oli saanut monet siellä olleet oppineet siirtymään länteen, ja mukana oli tullut runsaasti kreikkalaisia käsikirjoituksia.)

Regiomontanuksen omista töistä on tärkein *De triangulis omnimodis*, ensimmäinen eurooppalainen systemaattinen trigonometrian esitys. Regiomontanuksen teos seurasi melko tarkkaan arabialaisia esikuvia. Se ilmestyi painosta vasta paljon Regiomontanuksen kuoleman jälkeen, vuonna 1533. Sisällöltään se vastaa nykyistä trigonometrian peruskurssia, mutta esitys on täysin verbaalista. Nykyistä merkintätapaa ei vielä ollut. Trigonometrisista funktioista käytettiin yleensä vain siniä ja kosinia. Itse sanan *trigonometria* esitti käyttöön *Bartholomæus Pitiscus* (1561–1613) julkaistessaan itävaltalaisen *Georg Joachimin* eli *Rhæticuksen* (1514–67) laatimia suurisuuntaisia trigonometrisia taulukoita, jotka oli laskettu kulmille 10" välein. Nykyinen trigonometristen funktioiden määrittely suorakulmaisen kolmion sivujen suhteina on Rhæticuksen innovaatio. Varhaisissa trigonometrisissa taulukoissa vältettiin trigonometristen funktioiden arvoissa esiintyvät desimaalit käyttämällä taulukoissa suorakulmaisia kolmioita, joiden hypotenuusa oli hyvin pitkä, jopa tuhat biljoonaa pituusyksikköä. Kateettien pituudet oli helppo ilmaista kokonaisluvuin.

Kirjapainotaito teki 1400-luvun loppupuolella mahdolliseksi tuottaa lisääntyneen kaupan tarpeisiin kirjoitettuja laskuoppeja: ensimmäinen tällainen oli tuntemattomaksi jääneen tekijän *Trevison aritmetiikka* vuodelta 1478. Saksassa vaikuttanut laskuoppien kirjoittaja *Adam Riese* (1492–1559) on jättänyt saksan kieleen täsmällisyyttä ilmentävän puheenparren *nach Adam Riese* (vrt. Suomessa vanhempien ihmisten hyvin tuntema ”Elon laskuopin mukaan”). Hiukan edistyneempiä aritmetiikan oppikirjoja kirjoittivat mm. italialainen *Luca Pacioli* (1445[?]–1509[?]) ja ranskalainen *Nicolas Chuquet* (1445–1488). Paciolin laajalle levinnyt teos *Summa de arithmetica, geometria, proportione et proportionalita* ei juuri sisältänyt enempää kuin Fibonaccin 300 vuotta vanhempi kirja. Pacioli esitteli italialaisten kauppiaiden käyttöön ottaman *kaksinkertaisen kirjanpidon*. Tästä syystä häntä toisinaan pidetään kirjanpitotaidon isänä. Chuquetin (ranskankielinen!) käsikirjoitus *Triparty en la science des nombres* (1484) sisälsi alkeellista symbolien käyttöä (esim. $\sqrt{14 - \sqrt{180}}$ esiintyy muodossa $R)^2.14.\overline{m}.R)^2 180$; yhteen- ja vähennyslaskun merkkeinä käytettiin melko yleisesti kirjaimia p (plus = enemmän) ja m (minus = vähemmän), käsitteli negatiivisia lukuja ja esitteli ensi kertaa suurten lukujen nimitykset *biljoona*, *triljoona* jne. Chuquet'n biljoona oli sama kuin mm. Suomessa nykyään vallitseva käytäntö, 10^{12}.

Nykyaikaisia piirteitä alkoi yleisemminkin tulla esiin: 1500-luvun alkupuolen laskuopeista löytyy hajanaisia plus- ja miinusmerkkien sekä yhtäläisyysmerkkien esiintymiä (=-merkin ensimmäinen käyttäjä, englantilainen *Robert Recorde*, 1520–58, perusteli kahden vaakasuoran viivan valintaa vanhanaikaisella englannilla *”bicause noe .2. thynges can be moare equalle”*), negatiivisia kertoimia, juurimerkkejä jne. +-merkki on luultavasti muotoutunut &-symbolista, − saattaa olla m-kirjaimen korruptoitunut muoto. Ensi kerran nämä merkit ovat nykyisessä käytössä *Johann Widmanin* (s. n. 1460) vuonna 1489 ilmestyneessä laskuopissa, kuitenkin pääasiassa mittayksiköiden yhteydessä osoittamassa, että mitattava jokin määrä ylitti tai alitti jonkin tasamäärän isompaa mittayksikkömäärää. Nykyinen juurimerkkimme on itse asiassa r-kirjaimesta muodostunut; r on sanan *radix* alkukirjain; samaa etymologiaa on esim. *retiisi*. Se ilmestyi ensi kerran saksalaisen *Christoff Rudolffin* algebran oppikirjassa vuonna 1525.

6.2 Kuvataide ja geometria

Renessanssin matematiikasta puhuttaessa ei sovi unohtaa taiteen ja geometrian, etenkin avaruusgeometrian yhteyksiä. Perspektiivin vähittäinen tulo maalaustaiteeseen todistaa taiteilijoiden kiinnostuksesta geometriaan. Varhaisin perspektiivistä ja maalaustaiteesta kirjoittanut oli firenzeläinen arkkitehti *Leon Battista Alberti* (1404–72), Luca Paciolin ystävä. Hän käsitteli taitelijalle tarpeellisia opintoja ja korosti matematiikan keskeistä asemaa niissä. Perspektiiviin liittyviä tarkasteluja voi myös pitää projektiivisen geometrian esiasteina. Renessanssin suurista taiteilijoista esimerkiksi *Albrecht Dürer* (1471–1528) ja *Leonardo da Vinci* (1452–1519), myös Luca Paciolin ystävä ja työtoveri, olivat myös kelpo matemaatikoita. Dürerin 1514 valmistuneessa *Melancholia*-kuparipiirroksessa esiintyy ensimmäisiä kertoja länsimailla *taikaneliö*, joita etenkin kiinalaiset olivat konstruoineet jo ainakin ajanlaskun ensimmäisillä vuosisadoilla. Dürerin neliö on

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

(huomaa vuosiluku alarivillä!). Dürer kirjoitti myös keskeneräiseksi jääneen geometrisen tutkimuksen, jossa hän mm. esitteli metodeja useiden transkendenttikäyrien piirtämiseksi.

Löytöretkien synnyttämä maantieteen maailmankuvan avartuminen johti kehitykseen kartanpiirtämisessä. *Gerhardus Kremer* alias *Mercator* (1512–94) julkaisi 1569 ensimmäisen Mercatorin projektioon piirretyn kartan.

6.3 Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisu

Kaikki aikaisemmat aritmetiikan ja algebran oppikirjat jätti varjoon italialaisen lääkärin, matemaatikon ja paavin henkilökohtaisen astrologin *Geronimo* tai *Girolamo Cardanon* (1501–76) vuonna 1545 ilmestynyt teos *Ars Magna*, joka sisälsi raportin ensimmäisistä todella merkittävistä matemaattisista edistysaskeleista sitten antiikin (*ars magna* = suuri taito tarkoitti algebraa vastakohtana vähempiarvoiselle aritmetiikalle). Kysymyksessä olivat kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden algebralliset ratkaisukaavat. Luca Pacioli oli Omar Khaijjamin tavoin pitänyt kolmannen asteen yhtälön ratkaisemista mahdottomana tai ainakin yhtä vaikeana kuin ympyrän neliöinti.

Kertomus ratkaisukaavojen keksimisen ja julkaisun vaiheista kuuluu matematiikan historian värikkäimpiin. – Värikäs oli Cardanon elämäkin, johon sisältyi niin palvelusta astrologina ja lääkärinä Euroopan hoveissa, lääketieteen ja matematiikan oppituolien hallintaa Milanossa, Paviassa ja Bolognassa kuin kidutusta inkvisition käsissä ja kirkonkirous Jeesuksen horoskoopin julkaisemisen takia. Säilyttääkseen astrologin maineensa Cardano tiettävästi lakkasi syömästä, kun hänen itselleen ennustamansa kuolinpäivä lähestyi, ja kuolikin sitten oikea-aikaisesti. Kardaaninivel on saanut nimensä Cardanolta.

Kolmannen asteen yhtälön $x^3 + mx = n$ ratkaisukaavan keksi ilmeisesti Bolognan yliopiston matematiikan professori *Scipione del Ferro* (1465–1526) noin vuonna 1501. Hän ei julkaissut tulostaan, mutta ilmaisi sen kuitenkin venetsialaiselle oppilaalleen, matemaattisesti keskinkertaiselle *Antonio Maria Fiorille*. Noin vuonna 1535 oli myös itseoppinut matemaatikko *Niccoló Fontana* eli *Tartaglia* (1499–1557) keksinyt tai saanut selville yhtälön $x^3 + mx^2 = n$ ratkaisukaavan. Tartaglian kerskuttua tiedollaan järjestettiin Venetsiassa 22. helmikuuta 1535 Fiorin ja Tartaglian kesken julkinen yhtälönratkaisukilpailu. Se päättyi Tartaglian kiistattomaan voittoon, sillä toisin kuin Tartaglia, Fior hallitsi ratkaisukaavan vain yhtä yhtälön kertoimien merkkien kombinaatiota vastaavassa tapauksessa, tapauksessa $x^3 + px = q$, mutta ei tapauksessa $x^3 = px + q$. Häikäilemätön Cardano onnistui vuonna 1539 perättömien lupausten avulla hankkimaan kaavan Tartaglialta, joka ehdottomasti vaati Cardanoa pitämään tiedon salassa. Tartaglia oli varovasti kätkenyt informaationsa runomuotoon (”*Quando chel cubo con le cose appresso/ Se agguaglia á qualche numero discreto/ Trovan dui altri, differenti in esso/ ...*”), mutta Cardano pääsi siitä selville. Kun kaavat piakkoin tulivat julki Ars Magnassa, syntyi kiivas riita, jonka yhteydessä Cardano syytti Tartaglian itse asiassa varastaneen Ferron kaavan.

Cardanoa tuki syntyneessä polemiikissa hänen oppilaansa *Luigi Ferrari* (1522–65). Cardanolta oli joskus kysytty ratkaisua ongelmaan, joka johti neljännen asteen yhtälöön. Cardano ei osannut tehtävää ratkaista, mutta hän pani Ferrarin tutkimaan asiaa. Tämä keksikin ratkaisumenetelmän (jonka eräässä vaiheessa on osattava ratkaista kolmannen asteen yhtälö), ja myös sen Cardano julkaisi Ars Magnassa. – Cardano ei pyrkinyt väittämään kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisukaavoja omikseen, vaan tunnusti asianmukaisesti niiden alkuperän. Kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavoja kutsutaan silti yhä *Cardanon kaavoiksi*, neljännen asteen yhtälön ratkaisukaavoja taas *Ferrarin kaavoiksi.* Cardanon kaavojen johtamiseksi tarkastellaan kolmannen asteen yhtälöä muodossa

$$x^3 + px + q = 0,$$

johon yleisestä muodosta $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ aina päästään sijoituksella $x = y - \frac{a}{3}$. Merkitään $x = u + v$. Jos lisäksi vaaditaan, että $3uv = -p$, saadaan yhtälö muotoon

$$u^3 + v^3 + q = 0.$$

Tällöin $y = u^3$ toteuttaa toisen asteen yhtälön

$$y - \frac{p^3}{27}\frac{1}{y} + q = 0,$$

joka voidaan ratkaista. Saadaan

$$y = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

josta

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Ferrarin kaavoihin päästään muotoa

$$x^4 + 2ax^2 + bx + c = 0$$

olevasta yhtälöstä. Se täydennetään neliöksi

$$(x^2 + a)^2 = a^2 - bx - c.$$

Tuodaan mukaan parametri y, joka toteuttaa yhtälön

$$\begin{aligned}(x^2 + a + y)^2 &= (x^2 + a)^2 + 2y(x^2 + a) + y^2 \\ &= (a^2 - bx - c) + 2y(x^2 + a) + y^2 = 2yx^2 - bx + a^2 - c + 2ay + y^2.\end{aligned}$$

Pyritään nyt valitsemaan y niin, että yhtälön oikea puoli on täydellinen neliö $(px + q)^2$. Näin on, jos kyseisen oikean puolen muodostavan x:n toisen asteen polynomin diskriminantti on 0. Tämä johtaa y:n kolmannen asteen yhtälöön $b^2 - 8y(y^2 + 2ay + a^2 - c) = 0$. Kun tämä kolmannen asteen yhtälö ratkaistaan Cardanon kaavoilla ja saatu y sijoitetaan edelliseen neljännen asteen yhtälöön, niin yhtälön molemmat puolet ovat neliöitä, ja juurenoton jälkeen jää x:n ratkaisemiseksi enää toisen asteen yhtälö.

Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisukaavojen keksimisen suurin merkitys lienee siinä, että nyt saatettiin havaita uutta löydettävää vielä olevan jäljellä. Antiikin viisaat eivät olleet vielä rakentaneet matematiikkaa valmiiksi. Cardanon ja Ferrarin kaavat eivät sinänsä ole kovin hyödyllisiä: käytännössä kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisut haetaan approksimaatioista, kuten oli osattu tehdä jo Cardanon aikanakin.

Cardanon kaavat johtavat silloin, kun yhtälön kaikki kolme juurta ovat reaalisia, tilanteeseen, jossa reaalijuuret esiintyvät kahden kompleksiluvun, itse asiassa kahden liittokompleksiluvun kuutiojuurten erotuksina. Tämä ns. *casus irreducibilis* jäi Cardanolle epäselväksi, vaikka hän siihen huomiota kiinnittikin. (Kompleksilukuja käyttävä nykymatemaatikko selvittää ongelman helposti.)

Cardano käsitteli negatiivisten lukujen neliöjuuria toisen asteen yhtälön tapauksessa ("jaa luku 10 kahteen osaan, joiden tulo on 40"), mutta vähän myöhemmin *Raffael Bombelli* (1526[?]–73) huomasi eräissä konkreettisissa tapauksissa kuten yhtälössä $x^3 = 15x + 4$, jolla on ilmeinen ratkaisu $x = 4$ ja Cardanon kaavojen mukainen ratkaisu $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, että jos "liittoluvuista" otetut kuutiojuuret oletetaan toistensa "liittoluvuiksi", kaavat toimivat sellaisinaan. Bombelli otti käyttöön nimitykset *piu di meno* ja *meno di meno*, jotka vastaavat nykymerkintöjä $i = \sqrt{-1}$ ja $-i = -\sqrt{-1}$, ja näille mm. kaavoja $i \cdot i = (-i) \cdot (-i) = -1$ vastaavat muodolliset laskusäännöt. Jos olisi $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$ ja $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}$, olisi $a^2 + b^2 = (a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1}) = \sqrt[3]{(2+\sqrt{-121})(2-\sqrt{-121})} = \sqrt[3]{125} = 5$. Koska juuri 4 olisi $a + b\sqrt{-1} + a - b\sqrt{-1}$, olisi $a = 2$ ja $b = 1$. Ja todellakin $(2+\sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$ ja $(2-\sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}$. Havainto antoi uskoa menetelmän toimivan muidenkin yhtälöiden tapauksessa.

Bombellin *Algebra* ilmestyi v. 1572. Siinä käytetyt "imaginaariluvut" ovat lähinnä muodollinen keino sovittaa Cardanon kaavat muuta kautta tunnettuihin ratkaisuihin. Kompleksilukujen todellinen luonne selvisi kuitenkin vasta vähitellen seuraavien kolmen vuosisadan kuluessa.

Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisun ydin on tehtävän palauttamisessa alemmanasteisen yhtälön, *resolventtiyhtälön*, ratkaisemiseen. Ikävä kyllä viidennen ja korkeamman asteen yhtälöiden tapauksessa vastaavalla tavalla konstruoidut resolventtiyhtälöt tulevat olemaan korkeampaa astetta kuin alkuperäinen yhtälö.

6.4 Viète ja Stevin

1500-luvun lopun merkittävin ja monipuolisin matematiikko oli ranskalainen juristi ja hallintomies *Francois Viète* eli *Vieta* (1540–1603). Viète teki palveluksia Ranskan hallitsijoille mm. salakirjoituksia selvittämällä; espanjalaisten käyttämän salakirjoituksen avaaminen oli näille niin yllättävää, että kuningas Filip II syytti ranskalaisia mustaan magiaan turvautumisesta. Paavi, jonka omat salakirjoitusasiantuntijat olivat myös helposti avanneet Filipin viestit, ei kuitenkaan ottanut Filipin syytteitä käsittelyyn.

Viète oli flaamilaissyntyisen, mutta enimmäkseen Hollannissa toimineen insinöörin *Simon Stevinin* (1548–1620) ohella innokkaimpia desimaalilukujen käytön puoltajia. Tarkoissa laskutoimituksissa käytettiin tuolloin yhä babylonialais-hellenistisen tradition mukaisesti seksagesimaalimurtolukuja. Desimaalimerkintä ei heti vakiintunut nykyiselleen. Viètellä esiintyi mm. merkintöjä 141,421, $\frac{356,24}{}$ (100 000-säteisen ympyrän sisään piirretyn neliön sivu) ja 314,159,$\frac{265,35}{1,000,00}$ (100 000-säteisen puoliympyrän kehä). Stevin julkaisi 1585 flaaminkielisen kirjan *De Thiende* (Kymmenesosasta), jossa esiteltiin laskeminen desimaaleilla, mutta merkinnässä jokaista numeroa seurasi rengastettu numero, joka osoitti, mistä kymmenesosasta oli kysymys. Stevin kiinnitti myös huomiota mittayksiköiden ja niiden osien epäsystemaattisuuteen ja ehdotti kaikenlaisille mitoille yhdenmukaista kymmenes-, sadas- jne. osajakoa.

Kauaskantoisin Vièten uudistuksista oli kirjainten käyttö tunnettujen ja tuntemattomien suureiden merkinnässä. Kirjassaan *In artem analyticem isagoge* (Johdatus analyysin taitoon, 1591) Viète merkitsi vokaaleilla tuntemattomia suureita ja konsonanteilla tunnettuja. Aivan täysin nykyaikaisia eivät Vièten käyttämät symbolit kuitenkaan vielä olleet: osa kaavoissa tarvittavista merkinnöistä oli sanallisia. Esimerkiksi yhtälön $A^3 + BA = CA^2 + D$ Viète kirjoitti ”*A cub + B plano in A æquatur C in A quad + D solido*”. Huomataan, että Vièteллekin yhtälöllä oli geometrinen merkitys: dimensioiden tuli täsmätä. Vièten eri aikalaisten kirjoituksissa esiintyvät yhteensä jokseenkin kaikki nykyiset symbolit, mutta yhtä aikaa ne tulivat käyttöön vasta seuraavan vuosisadan puolella.

Algebrassa Viète havaitsi osan yhtälöiden juurien ja kertoimien välisistä yhteyksistä (kuten että juurien summan vastaluku on lähinnä korkeimman tuntemattoman potenssin kerroin), mutta koska hän hyväksyi vain positiiviset juuret, teoria jäi vaillinaiseksi. Polynomiyhtälön kertoimet juurien avulla lausuvia kaavoja kutsutaan edelleen Vièten kaavoiksi.

Kolmannen asteen yhtälön $x^3 + px + q = 0$ Viète ratkaisi sijoituksella

$$x = \frac{p}{3z} - z.$$

Sijoituksen jälkeen yhtälö muuttuu z^3:n toisen asteen yhtälöksi

$$z^6 - qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Trigonometriaa Viète edisti mm. tyyppiä

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

olevilla kaavoilla, *tangenttilauseella*

$$\frac{\tan\dfrac{A+B}{2}}{\tan\dfrac{A-B}{2}} = \frac{a+b}{a-b}$$

ja $\sin x$:n ja $\cos x$:n potenssien mukaan etenevillä $\sin kx$:n ja $\cos kx$:n kehitelmillä

$$\sin kx = k\cos^{k-1}x\sin x - \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{k-3}x\sin^3 x + \cdots,$$

$$\cos kx = \cos^k x - \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\cos^{k-2}x\sin^2 x + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{k-4}x\sin^4 x - \cdots$$

Viète osasi valjastaa trigonometrian algebran palvelukseen: hän johti trigonometriseen sijoitukseen perustuvan kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavan: mielivaltaiselle kulmalle α pätee

$$\cos^3\alpha = \frac{3}{4}\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 3\alpha.$$

Olkoon ratkaistavana yhtälö

$$x^3 + px + q = 0.$$

Merkitään $x = ny$; ratkaistava yhtälö on nyt $y^3 = -\frac{p}{n^2}y - \frac{q}{n^3}$. Valitaan n niin, että $-\frac{p}{n^2} = \frac{3}{4}$. Etsitään α, jolle $\cos 3\alpha = -\frac{4q}{n^3} = -\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}$. Tämä voidaan tehdä täsmälleen silloin, kun Cardanon kaavoissa neliöjuuren alla oleva suure $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$ on negatiivinen, eli juuri Cardanon casus irreducibiliksen tapauksessa. Nyt $x = n\cos\alpha$ on alkuperäisen kolmannen asteen yhtälön ratkaisu. Kaikki ratkaisut saadaan ottamalla huomioon eri mahdolliset α:n valinnat.

Kuuluisaksi tuli Vièten antama yllättävä trigonometrinen ratkaisu flaamilaisen *Adriaen van Roomenin* esittämälle 45. asteen yhtälölle

$$y^{45} - 45y^{43} + 945y^{41} - 12300y^{39} + \cdots + 95634y^5 - 3795y^3 + 45y = C,$$

jossa esim. $C = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$. Viète tunnisti, että yhtälön vasen puoli on $2\sin\phi$:n esitys luvun $y = 2\sin\frac{\phi}{45}$ avulla ja löysi yhtälön 23 positiivista ratkaisua. Vièteltä periytyy myös ensimmäinen π:n analyyttinen lauseke, päättymätön tulo

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \ldots,$$

joka on yksinkertaisesti johdettavissa ympyrän sisään piirrettyjen säännöllisten 2^n-kulmioiden alojen raja-arvosta. Jos A_n on yksikköympyrän sisään piirretyn säännöllisen n-kulmion ala, niin

$$\frac{A_n}{A_{2n}} = \frac{\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2n}{2}\sin\frac{2\pi}{2n}} = \cos\frac{2\pi}{2n}.$$

Kun otetaan huomioon, että $A_4 = 2$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lim_{n\to\infty} A_{2^n} = \pi$ ja että $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos x)}$, saadaan Vièten relaatio.

6.5 Logaritmien keksiminen

Astronomia ja merenkulku tarvitsevat varsin mutkikkaita trigonometrisia numerolaskuja. Pitkien kertolaskujen muuttamiseksi helpommiksi yhteen- ja vähennyslaskuiksi kehittyi 1500-luvulla, löytöretkien vuosisadalla, ns. *prostafairesis*-menetelmä. Se perustui tyyppiä

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

oleviin kaavoihin ja trigonometrisiin taulukkoihin.

Originelli skotlantilainen tilanomistaja, Merchistonin paroni *John Napier (Neper)* (1550–1617) (jonka julkaisutuotantoon kuuluu mm. aikanaan tavattoman suuren levikin saanut numerologinen todistus sille, että paavi on Antikristus, mutta myös käyttökelpoisia pallotrigonometrian kaavoja) keksi lyhemmän tavan. Jos tarkastelee geometrisen jonon termejä, huomaa, että jonon kahden termin tulo esiintyy jonossa paikalla, jonka järjestysnumero saadaan laskemalla yhteen alkuperäisten termien järjestysluvut. Napier keksi ottaa käyttöön jonon, jonka termit ovat hyvin lähellä toisiaan. Tällaisen jonon hän sai valitsemalla jonon suhdeluvuksi luvun $1-10^{-7} = 0{,}9999999$. Desimaalien välttämiseksi Napier kertoi jonon luvut luvulla 10^7. (Tämä perustui mm. Regiomontanuksen käytäntöön jakaa ympyrän säde 10^7 osaan ja mitata jänteiden puolikkaita, siis sinejä, tällä mitalla.) Lukua N vastaava Napierin logaritmi $L = \mathrm{Nap}\log N$ on siten luku, jolle pätee

$$N = 10^7(1-10^{-7})^L.$$

Kahden luvun N_1 ja N_2 tulolle saadaan

$$N_1N_2 10^{-7} = 10^7(1-10^{-7})^{L_1+L_2},$$

joten logaritmien tulosääntö ei sellaisenaan sovi Napierin logaritmeille. Napierin logaritmien ja ”Neperin luvun” e välinen yhteys selittyy siitä, että $(1-10^{-7})^{10^7}$ on likimain $1/e$.

Logaritmitaulukkojensa luvut Napier laski geometrisista sarjoista monimutkaisella interpolointimenettelyllä. Ensimmäisessä vaiheessa Napier vähensi luvusta 10 000 000 sen kymmenesmiljoonasosan, erotuksesta jälleen kymmenesmiljoonasosan jne., kunnes sadan vähennyksen jälkeen tuli lukuun 9999900,000495. Tämän luvun Napier-logaritmi on 100. Lineaarisen ekstrapoloinnin avulla luvun 9 999 900 Napier-logaritmiksi tuli 100,000495. Tämän jälkeen Napier alkoi vähentää luvusta 10 000 000 sen sadastuhannesosan, erotuksesta samoin jne. Erotukset ovat jälleen geometrisen jonon lukuja, ja niiden Napier-logaritmit 100,000495:n monikertoja. 50:n vähennyksen jälkeen ollaan luvussa 9 995 001,224804 (Napier teki tässä kolmanteen desimaaliin vaikuttavan laskuvirheen), jonka Napier-logaritmi on $50\cdot 100{,}000495 = 5000{,}024753$. Ekstrapolointi antaa luvun 9 995 000 Napier-logaritmiksi 5001,250175. Nyt Napier rakensi vielä 21-rivisen ja 69-sarakkeisen taulukon, jossa kukin luku on sen yläpuolella oleva luku vähennettynä kahdestuhannesosallaan ja samalla vasemmalla oleva luku vähennettynä sadasosallaan. Tällöin kunkin sarakkeen alin luku on suunnilleen sama kuin seuraavan sarakkeen ylin luku ja taulukon oikeaan alakulmaan tulee luku 4998609,4019. Kun vielä ekstrapoloidaan luvun 9 900 000 Napier-logaritmiksi taulukon vasemmanpuoleisen sarakkeen avulla (jonka Napier-logaritmit ovat 5001,250175:n monikertoja) 100503,223, saadaan p:nnellä rivillä ja q:nnessa sarakkeessa olevan luvun Napier-logaritmiksi $(p-1)\cdot 5001{,}25+(q-1)\cdot 100503{,}22$. – Koska Napier tähtäsi itse asiassa kulmien sinien logaritmeihin ja hänen kehyksenään oli suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on 10^7, kuvailtu prosessi antoi mahdollisuuden laskea sinien logaritmit 30°:n ja 90°:n väliltä. Pienempiin kulmiin pääsee käsiksi kaavan $\sin 2\theta = 2\sin\theta\sin(90^\circ-\theta)$ avulla.

Napier perusteli menetelmäänsä geometris-dynaamisella tarkastelulla. Jos piste D liikkuu tasaisella nopeudella 10^7 pitkin puolisuoraa $O\infty$ ja piste C liikkuu pitkin janaa AB, jonka pituus on 10^7 niin, että sen nopeus jokaisella ajan hetkellä on CB, ja jos $x = OD$, $y = CB$, niin ajan t funktiona on $x = 10^7 t$ ja $y' = -y$, $\ln y(t) = -t + c$, $c = \ln 10^7$. Tästä saadaan $x = 10^7 \ln \dfrac{10^7}{y}$. Interpolaatioapproksimaation takia Napierin taulukoimat logaritmit eivät olleet aivan tasan edellisen kaavan mukaisia.

Kreikan sanoista *logos* 'suhde' ja *arithmos* 'luku' kokoon pantu sana *logaritmi* on Napierin käyttöön ottama, samoin kuin pisteen ja pilkun käyttö desimaalierottimena. Napier käytti vaihtelevasti molempia merkkejä. Aluksi Napier oli kutsunut näitä lukuja *keinotekoisiksi luvuiksi*.

Napier julkaisi ideansa ja logaritmitaulukkonsa 1614 teoksessa *Mirifici logarithmorum canon descriptio* ensi sijassa helpottamaan trigonometrisia laskuja. Lukujen logaritmien sijasta hän puhuikin sinien logaritmeista. Seuraavana vuonna lontoolainen professori (ilmeisesti ensimmäinen matematiikan professori Englannissa) *Henry Briggs* (1561–1639) kiinnostui logaritmeista. Hän vieraili Napierin luona Skotlannissa, ja yhteisymmärryksessä Napier ja Briggs päätyivät muunnettuun järjestelmään, jossa kantalukuna olisi 10. Briggs julkaisi 1624 lukujen 1 – 20 000 ja 90 000 – 100 000 14-desimaaliset 10-kantaiset logaritmitaulut. Briggsin taulukko perustui lukujen $\sqrt{10} = 10^{1/2}$, $10^{1/4}$, $10^{1/8}$, $\ldots$, $10^{1/2^{54}}$ laskemiseen peräkkäisillä neliöjuurenotoilla. Logaritmit levisivät yleiseen käyttöön hämmästyttävän nopeasti. Keplerin mielestä logaritmit pidensivät tähtitieteilijän iän kaksinkertaiseksi.

Napierin ja Briggsin rinnalla kunnia logaritmien keksimisestä kuuluu myös sveitsiläiselle kojeiden rakentajalle *Jobst Bürgille* (1552–1632), jonka itsenäisesti jo 1588 keksimä logaritmikäsite tuli julkisuuteen vasta 1620. Bürgin logaritmit perustuivat luvun 1,0001 potensseihin: luvun $10^8(1+10^{-4})^n$ Bürgin logaritmi on $10n$.

Myös luonnolliset logaritmit, siis kantalukuun e perustuvat, alkoivat ilmaantua matematiikkaan vuoden 1620 paikkeilla, vaikka niiden tärkeys havaittiinkin vasta myöhemmin, differentiaali- ja integraalilaskennan kehityttyä tarpeeksi.

Logaritmien yhteys matemaattiseen analyysiin alkaa flaamilaisen jesuiitan *Gregóire de San Vincentin* vuonna 1647 julkaisemasta havainnosta, jonka mukaan (taas nykyaikaistetun puhetavan mukaan) suorakulmaisen hyperbelin $xy = 1$, x-akselin ja suorien $x = a$, $x = b$ rajaaman alueen ala on sama kuin hyperbelin, x-akselin ja suorien $x = ta$ ja $x = tb$ rajaaman alueen. Asian toteaa helposti approksimoimalla alueita esim. n:n suorakaiteen muodostamilla porraskuvioilla: edellisen alueen tapauksessa i:nnen suorakaiteen korkeus on t kertaa jälkimmäisen alueen vastaavan suorakaiteen korkeus, kun taas jälkimmäisessä tapauksessa suorakaiteiden kannat ovat t kertaa edellisen tapauksen suorakaiteiden kannat.

Tästä seuraa, että hyperbelin määrittämällä pinta-alalla on logaritminen yhteenlaskuominaisuus: jos $A(a)$ on suorien $x = 1$ ja $x = a$ sekä hyperbelin ja x-akselin erottama ala, ja a, $b > 1$, niin San Vincentin tuloksen mukaan $A(a) = A(ab) - A(b)$ eli $A(ab) = A(a) + A(b)$.

Nimityksen *luonnollinen logaritmi* esitti ensimmäisenä saksalainen, mutta Englannissa vaikuttanut *Nicolas Mercator* (1620–87) vuonna 1668. Tällä hän tarkoitti nimenomaan hyperbelin $(x + 1)y = 1$ määrittämiä pinta-aloja. Mercator esitti myös sarjakehitelmän

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

Samoihin aikoihin sarjan löysi myös Isaac Newton.

7 1600-luku: differentiaali- ja integraalilaskennan varhaisvaiheet ja analyyttinen geometria

1600-lukua voidaan pitää eräänä matematiikan historian suurista käännekohdista. Tuolloin syntyivät nykymatematiikan keskeiset metodit, *differentiaali- ja integraalilaskenta*, jota myös kutsutaan *infinitesimaalilaskennaksi*, ja *analyyttinen geometria*. Edellisen synty liitetään yleensä Newtoniin ja Leibniziin, jälkimmäisen Descartesiin.

Suuret keksinnöt eivät kuitenkaan syntyneet yhtäkkiä. Noin sadalta vuodelta ennen Newtonin ja Leibnizin aikaa löytyy päättelyitä, joissa on nähtävissä matemaattiselle analyysille tunnusomaisia piirteitä. Infinitesimaalilaskentaa ennakoinut Arkhimedeen *Metodi* oli tuolloin tuntematon, mutta ajan yleisenä henkenä oli antiikin työlään ekshaustiomenetelmän korvaaminen nopeammin tuloksiin johtavilla, joskin loogisesti vähemmän pitävillä päättelyillä. Niiden ajatus oli yleensä jakaa tarkasteltava kohde pieniin tai "äärettömän pieniin", *infinitesimaalisiin* osiin, ja yhdistää pieniä osia koskevat johtopäätökset koko kohteeseen.

7.1 Stevin, Kepler ja Galilei

Ensimmäisiä infinitesimaalisten päättelyjen esittäjiä oli Stevin, joka v. 1586 ilmestyneessä teoksessaan *De Beghinselen der Weeghconst* (Punnitustaidon alkeet) perusteli käsitystään kolmion muotoisen kappaleen painopisteen sijainnista kolmion mediaanilla ajattelemalla kolmion sisään piirrettyjä pieniä suunnikkaita, joiden pitemmät sivuparit olivat kolmion sivujen suuntaisia. Kunkin tällaisen painopiste oli suunnikkaan keskikohdassa, joten kolmiokin tuli tasapainottumaan pitkin kutakin mediaaniaan. – Monipuolinen Stevin on myös ensimmäinen, joka esitti soittimien tasaviritystä: Pythagoraalta perustuvien kokonaislukusuhteiden sijaan Stevin esitti oktaavin $1:2$ suhteen jakamista 12 osaan, ja kunkin viereisen sävelen suhteen tuli olla $1:\sqrt[12]{2}$.

Infinitesimaalisia pinta-alan- ja tilavuudenmääritysmenetelmiä käytti huomattavalla menestyksellä tähtitieteen suurmies *Johannes Kepler* (1571–1630). Ympyrän ja ellipsin alat Kepler laski täyttämällä kuviot kapeilla kolmioilla, joiden kantojen annettiin kutistua äärettömän pieniksi.

Keplerin planeettaliikettä koskeva toinen laki – auringosta planeettaan piirretty vektori piirtää samassa ajassa aina saman pinta-alan, perustui kuitenkin virheelliseen infinitesimaalipäättelyyn. Kepler oletti havaintojen perusteella, että planeetan nopeus kunakin hetkenä on kääntäen verrannollinen sen auringosta A laskettuun etäisyyteen r. Jos radan pisteiden P ja Q välinen kaari jaetaan osakaariin Δs, niin planeetan välillä PQ käyttämä aika on likimain

$$t = \sum \Delta t_i = \sum \frac{\Delta s}{v_i} = \frac{1}{k} \sum r_i \Delta s.$$

Toisaalta Kepler otaksui kolmion, jota rajoittavat janat AP ja AQ sekä kaari PQ koostuvan

pienistä kolmioista, joiden alat ovat
$$\frac{1}{2}r_i\Delta s,$$
ja joiden alojen summa on siis vakio $\times\, t$. Sattumoisin planeetan nopeutta koskeva virheellinen oletus ja "integroinnissa" tapahtunut virhe kumoavat toisensa!

Hyvä viinivuosi 1612 inspiroi Keplerin käyttämään samoja menetelmiä useiden pyörähdyskappaleen muotoisten viinitynnyrien tilavuuksien laskemiseksi. Tulokset ja avoimiksi jääneet kysymykset julkaistiin 1615 teoksena *Nova stereometria doliorum vinariorum.* – Esimerkkinä Keplerin integrointitavoista on rengaskappaleen, toruksen tilavuuden laskeminen. Olkoon toruksen sisäympyrän säde b ja leikkausympyrän a. Jos torus viipaloidaan paloiksi "putkea" vastaan kohtisuorilla tasoilla, niin yhden tällaisen palan tilavuus on likimain
$$\frac{1}{2}\pi a^2(t_1+t_2),$$
missä t_1 ja t_2 ovat viipaleen sisä- ja ulkoreunan paksuudet. Kun viipaleiden tilavuudet lasketaan yhteen, summautuvat t_1-luvut toruksen sisäympyrän kehäksi $2\pi b$ ja t_2-luvut ulkoympyrän kehäksi $2\pi(b+2a)$. Tilavuudelle saadaan (oikea) arvo $2\pi^2a^2(b+a)$.

Galileo Galilei (1564–1642) oli matematiikan professori, muttei varsinaisesti matemaatikko, vaikka hän puhuikin kauniisti matematiikasta kielenä, jolla luonnon salaisuudet on kirjoitettu. Myös suureiden funktionaalinen riippuvuus on implisiittisesti, mutta voimakkaasti esillä Galilein kirjoituksissa. Galilei teki varteenotettavia ja aikaansa edellä olleita havaintoja "äärettömän pienistä" ja "äärettömän suurista" suureista. Hän mm. kiinnitti huomiota "eri kertalukua" oleviin äärettömän pieniin suureisiin. – Galilei havaitsi ensimmäisenä sen äärettömän joukon perusominaisuuden, että joukon aidossa osajoukossa voi olla "yhtä monta" alkiota kuin alkuperäisessä joukossa: "On olemassa yhtä monta neliölukua kuin itse lukujakin."

7.2 Cavalierin integroinnit

Galilein oppilaista matemaatikkona kuuluisin oli *Bonaventura Cavalieri* (1598–1647), jesuiitta ja Bolognan yliopiston professori. Cavalierin "integrointimenetelmät" olivat Keplerin käyttämiä täsmällisempiä ja johtivat tulokseen useammin. Kepler laski yhteen mittalukuja, jotka liittyvät pieniin osiin, jotka kuitenkin olivat samaa ulotteisuutta kuin tutkittava kuvio. Cavalierin perusajatus oli muodostaa yksikäsitteinen vastaavuus kahden eri kuvion tai kappaleen infinitesimaalisten osien välillä; jos toiseen kuvioon liittyvä mittaluku oli tunnettu, toisen mittaluku saatiin näin selville. *Cavalierin periaate* sanoo, että jos kaksi kappaletta voidaan asettaa niin, että niitä tietyn tason suuntaisilla tasoilla leikattaessa kaikki leikkauskuviot ovat pareittain yhtä suuria , niin kappaleilla on sama tilavuus, tai jos leikkauskuvioiden aloilla on vakiosuhde, myös tilavuuksilla on tämä suhde. Periaatteen nojalla esim. r-säteinen ympyrä pohjana piirretyn h-korkuisen kartion tilavuus voidaan laskea vertaamalla kappaletta samankorkuiseen yksikköneliöpohjaiseen pyramidiin, jonka tilavuus on $\frac{1}{3}h$. Etäisyydellä x kappaleiden kärjistä oleva pohjien suuntainen taso leikkaa kartiosta ympyrän, jonka ala on $\frac{x^2}{h^2}\pi r^2$, ja pyramidista neliön, jonka ala on $\frac{x^2}{h^2}$. Tästä seuraa, että kartion tilavuus on $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Cavalierin pääteos *Geometria indivisibilibus continuorum* (1635) vaikutti suuresti infinitesimaalilaskennan kehitykseen. Teos sisältää tuloksen, joka on yhtäpitävä kaavan

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \tag{1}$$

kanssa. Kaavan (1) Cavalieri totesi oikeaksi arvoilla $n = 1, \ldots, 9$ vertaamalla suunnikkaan sivun suuntaisten janojen potenssien ja lävistäjän suunnikkaasta erottamien kolmioiden kannan suuntaisten janojen potenssien summia.

Cavalierin päättely tapauksessa $n = 2$ on suunnilleen seuraava, modernisoiduin merkinnöin. Tarkastellaan tason ensimmäisessä neljänneksessä olevaa yksikköneliötä, jonka yksi kärki on origossa ja jonka lävistäjä on suora $y = x$. Jos lasketaan y-akselin suuntaisten janojen neliöiden summa, saadaan (symmetriaa hyväksi käyttäen)

$$1 = \sum (x + (1-x))^2 = 2\sum x^2 + 2\sum x(1-x).$$

Merkitään

$$x = \frac{1}{2} - z, \quad 1 - x = \frac{1}{2} + z,$$

jolloin

$$1 = 2\sum x^2 + \frac{1}{2} - 2\sum z^2.$$

Mutta kun x-janat peittävät neliön puolikkaan kokoisen suorakulmaisen kolmion, peittävät z-pituiset janat kaksi neliön kahdeksannen osan suuruista suorakulmaista kolmiota; yhden tällaisen kolmion yli summattuna on oltava

$$\sum z^2 = \frac{1}{8}\sum x^2,$$

koska kyseessä ovat suhteessa $1 : 2$ yhdenmuotoisten pyramidien tilavuudet. Näin ollen

$$\frac{1}{2} = 2\sum x^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8}\sum x^2,$$

josta

$$\sum x^2 = \frac{1}{3}$$

eli

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Tapauksessa $n = 3$ päättely on jo mutkikkaampi (merkitään $y = 1 - x$):

$$1 = \sum 1^3 = \sum (x+y)^3 = \sum x^3 + 3\sum x^2 y + 3\sum xy^2 + \sum y^3 = 2\sum x^3 + 6\sum x^2 y,$$

missä viimeinen yhtäsuuruus perustuu x:n ja y:n symmetriaan. Mutta aikaisempien tulosten ja symmetrian nojalla on edelleen

$$1 = 2\sum x^2 + 2\sum xy = \frac{2}{3} + 2\sum(x+y)xy = \frac{2}{3} + 4\sum x^2y,$$

joten

$$\sum x^2y = \frac{1}{12}.$$

Saadaan lopulta

$$\sum x^3 = \frac{1}{2}\left(1 - 6\cdot\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4}$$

eli

$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}.$$

Toinen matemaatikkona merkittävä Galilein oppilas ja työtoveri oli *Evangelista Torricelli* (1608–47), elohopeailmapuntarin keksijä. Torricelli onnistui ensimmäisenä määrittämään 1600-luvulla tutkimuskohteena suositun sykloidikäyrän rajoittaman alueen pinta-alan. Torricellin varhaisen kuoleman kerrotaan osaksi aiheutuneen sykloidin neliöinnin yhteydessä ranskalaisen *Giles Personne de Robervalin* (1602–75) kanssa nousseen kiivaan prioriteettikiistan aiheuttamasta mielipahasta.

7.3 Descartes ja analyyttinen geometria

Ranskalainen, mutta suuren osan elämästään Alankomaissa vaikuttanut *René Descartes* eli latinalaistetulla nimellä *Cartesius* (1596–1650) oli nuorempana seikkailija ja myöhemmin kuuluisa filosofi. Descartes sanoi filosofiassaan pyrkivänsä soveltamaan geometrian ja algebran parhaita puolia kaikkeen ajatteluun. Varsinaiselle matematiikalle hän omistautui vain ajoittain. Hänen matemaattinen pääteoksensa *La Géométrie* ilmestyi sekin suuren filosofisen teoksen *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences* (1637) liitteenä.

Vaikka analyyttista geometriaa pidetäänkin Descartesin keksintönä kuten termit *karteesinen koordinaatisto* ja *karteesinen tulo* osoittavat, ei La Géométrie juuri muistuta nykyistä analyyttista geometriaa koordinaatistoineen, käyrän yhtälöineen ja funktion kuvaajineen. Descartesin päätavoite oli algebran ja geometrian riippuvuuden osoittaminen ja algebran hyödyksi käyttäminen geometrian tutkimisessa. Algebra oli metodi, jonka käyttäjän ei tarvinnut antautua antiikin geometrikkojen monimutkaisiin ja kekseliäisyyttä vaativiin päättelyihin: tulokset voi saada suoraan laskemalla. Descartesin metodi geometriassa oli antaa jokaiselle tehtävän osalle, tunnetulle tai tuntemattomalle, symboli, johtaa symbolien välille riittävä määrä algebrallisia yhtälöitä ja ratkaista lopuksi tuntematon. Jos tehtävä oli indeterminoitu, Descartes sijoitti vapaasti valittavat janat x pitkin kiinteätä suoraa ja riippuvan janan y pitkin suoraa ℓ, joka lähti x-pituisen janan päätepisteestä kiinteässä kulmassa suoraan ℓ nähden. Täten Descartes itse asiassa tuli käyttäneeksi vinokulmaista koordinaatistoa. – ”Karteesisen koordinaatiston” perusajatus, tasoalueen pisteen sijainnin ilmoittaminen sen kahdelle kohtisuoralle suunnalle sattuvien projektioiden avulla, oli jo pitkään ennen Descartesia tuttu taivaanpallon ja maapallon leveys- ja pituusasteiden käytöstä.

Algebrallinen symbolismi oli Descartesin teoksessa ensi kertaa lähes sama kuin nykyisin käytössä oleva, ainoina poikkeuksina se, että Descartes kirjoitti aa symbolin a^2 sijasta, $\sqrt{C\,a}$ merkinnän $\sqrt[3]{a}$ sijasta ja että yhtäsuuruusmerkki ($\propto$ takaperin) oli erilainen kuin nykyisin. Merkintöjä a^3, a^4 jne. hän kyllä käytti. Aakkosten alkupään kirjaimien varaaminen tunnetuille ja loppupään tuntemattomille suureille on myös Descartesin innovaatio.

La Géométrie sisältää monia algebrallisia tuloksia. Yksi niistä on *Descartesin merkkisääntö*: polynomiyhtälön positiivisten ja negatiivisten (eli Descartesin terminologiassa *valheellisten*) juurten määrä voidaan päätellä polynomin peräkkäisten kertoimien eri- ja samanmerkkisyydestä: positiivisia juuria on (enintään) yhtä paljon kuin kertoimien jonossa on merkinvaihdoksia ja negatiivisia juuria on enintään yhtä paljon kuin kertoimien jonossa on peräkkäisten samanmerkkisten kertoimien pareja. Descartes ei esittänyt todistusta säännölleen; sen todistivat useat matemaatikot seuraavalla vuosisadalla. Descartesilta on myös peräisin se perustava havainto, että jos a on polynomin nollakohta, polynomi on jaollinen $x - a$:lla.

Ruotsin kuningatar *Kristiina* (1626–89) kutsui Descartesin vuonna 1649 Tukholmaan opettamaan itselleen filosofiaa. Poikkeuksellisen kylmä talvi 1650 ja kello viideltä aamulla pidetyt oppitunnit olivat Descartesille liikaa; hän sairastui keuhkokuumeeseen ja kuoli.

7.4 Fermat

Analyyttisen geometrian peruskäsitteet keksi itsenäisesti *Pierre de Fermat* (1601–65), vapaa-aikoinaan matematiikkaa tutkinut toulouselainen juristi. Selvemmin kuin Descartes Fermat oivalsi, että kahden muuttujan yhtälö määrittelee uran eli tasokäyrän. ”Aina, kun lopullisessa yhtälössä esiintyy kaksi tuntematonta, kyseessä on ura. Toisen [tuntemattoman janan] päätepiste piirtää suoran tai käyrän viivan.” Fermat tunnisti kaikki kahden muuttujan ensimmäisen ja toisen asteen polynomit suorien ja kartioleikkausten yhtälöiksi. Fermat'n analyyttinen geometria, kirjattuna teokseen *Ad locos planos et solidos isagoge*, painettiin vasta 1679, Fermat'n kuoleman jälkeen, kuten suurin osa hänen muustakin tuotannostaan. Käsikirjoituksena se kuitenkin oli Fermat'n aikalaisille tuttu.

Fermat kuuluu matematiikan historian suuriin nimiin. Tämä perustuu paitsi hänen saavutuksiinsa geometrian ja analyysin alalla, myös hänen monipuolisiin ja syvällisiin lukuteoreettisiin tuloksiinsa.

Fermat kehitti todistusmenetelmän, jota hän nimitti ”äärettömäksi laskeutumiseksi”. Siinä jonkin lukurelaation mahdottomuus osoitetaan epäsuorasti olettamalla kyseinen relaatio mahdolliseksi ja päättelemällä tästä, että relaatio toteutuu myös joillain pienemmillä luvuilla. Mutta tällöin relaatio saataisiin voimassaolevaksi yhä pienemmillä luvuilla, mikä ei voi olla mahdollista, koska positiivisten kokonaislukujen joukko on alhaalta rajoitettu. Fermat todisti äärettömän laskeutumisen menetelmällä mm., että ei ole olemassa yhtälön $x^4 + y^4 = z^4$ toteuttavia positiivisia kokonaislukuja x, y, z. Fermat ilmoitti (Diofantoksen *Arithmetikan* käännöksen marginaaliin tekemässään lisäyksessä) osaavansa todistaa saman tuloksen silloinkin, kun eksponenttina on mielivaltainen kokonaisluku $n \geq 3$. Tämä *Fermat'n suuren lauseen* tai *viimeisen teoreeman* nimellä tunnettu hypoteesi on yli 300 vuoden ajan kiehtonut sekä ammatti- että amatöörimatemaatikkoja. Saksalainen amatöörimatemaatikko ja lääkäri *Paul Wolfskehl* lahjoitti vuosisadan vaihteessa huomattavan palkinnon, joka oli tarkoitus antaa tietyt kriteerit täyttävälle Fermat'n ongelman ratkaisulle. Palkinto luovutettiin kesällä 1997 englantilaiselle *Andrew Wilesille*, joka oli kaksi vuotta aikaisemmin lopullisesti ratkaissut ongelman. Vaikka palkintosäätiö menetti lähes koko omaisuutensa Saksan 1920-luvun suurinflaatiossa, oli palkinto 75 000 Saksan markkaa.

Fermat'n ilman todistusta ilmoittamista tuloksista useimmat ovat lopulta osoittautuneet oikeiksi. Poikkeuksen tekee Fermat'n väite, jonka mukaan kaikki muotoa $2^{2^n}+1$ olevat luvut, ns. *Fermat'n luvut*, olisivat alkulukuja. Itse asiassa nämä luvut ovat muutamaa poikkeusta lukuunottamatta yhdistettyjä, ja nykyisen tietämyksen mukaan alkulukuja vain, kun $n = 0$, 1, 2, 3 tai 4. Ns. *Fermat'n pieni lause*, jonka mukaan $a^{p-1} - 1$ on jaollinen p:llä aina, kun p on alkuluku eikä a ole jaollinen p:llä, on sekin peräisin Fermat'lta, mutta lauseen todistukset ovat myöhemmältä ajalta.

Osoitetaan Fermat'n äärettömän laskeutumisen menetelmällä, että yhtälöllä

$$a^4 + b^4 = c^4$$

ei ole ratkaisua (a, b, c) positiivisten kokonaislukujen joukossa. Todistetaan itse asiassa vahvempi väite: yhtälöllä $a^4 + b^4 = c^2$ ei ole ratkaisua. Oletetaan, että ratkaisu olisi olemassa; oletetaan lisäksi, että a:lla, b:llä ja c:llä ei ole yhteisiä tekijöitä. Luvuista a ja b ainakin toinen on pariton; olkoon $a = 2p + 1$. Jos b:kin olisi pariton, olisi $a^4 + b^4$ ja siis c^2 muotoa $4k + 2$, mutta jos c on parillinen, niin c^2 on muotoa $4k$ ja jos c on pariton, on c^2 muotoa $4k + 1$. Siis b on parillinen. Koska a^2, b^2, c muodostavat Pythagoraan lukukolmikon, on olemassa sellaiset yhteistekijättömät p ja q, että $a^2 = p^2 - q^2$, $b^2 = 2pq$ ja $c = p^2 + q^2$. Koska a^2 on pariton, luvuista p ja q tasan yksi on pariton; koska a^2 on muotoa $4k+1$, on p^2:n oltava myös tätä muotoa. Siis p on pariton ja q on parillinen. Koska p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä ja $2pq = b^2$, on p:n ja $2q$:n oltava neliöitä. Olkoon $p = r^2$. Koska $p^2 = a^2 + q^2$, on Pythagoraan lukujen ominaisuuksien nojalla edelleen $p = m^2 + n^2$ ja $q = 2mn$, missä m:llä ja n:llä ei ole yhteisiä tekijöitä ja tasan toinen luvuista on pariton. Mutta $2q = 4mn$ on neliö. Siis m ja n ovat neliöitä, eli $m = x^2$, $n = y^2$. Mutta nyt $p = r^2 = x^4 + y^4$. Selvästi $r < c$, joten on olemassa pienempi neliö, joka jakaantuu kahdeksi neljänneksi potenssiksi.

7.5 Uusia integrointimenetelmiä

Pierre Fermat sekä hänen maanmiehensä *Blaise Pascal* (1623–62) ja Roberval kykenivät kukin johtamaan kaavan

$$\int_0^1 x^k\,dx = \frac{1}{k+1}$$

sisällön olennaisesti tiedon

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \tag{2}$$

perusteella. Potenssisumman

$$\sum_{k=1}^{n} k^p$$

lauseke oli tunnettu jo antiikissa tapauksissa $p = 1$ ja $p = 2$ ja islamilaisessa matematiikassa tapauksissa $p = 3$ ja $p = 4$. Pascal päätteli Pascalin kolmiota (joka, kuten aiemmin mainittiin, tunnettiin Kiinassa, mutta esiintyi länsimaillakin jo sekä Tartaglian että Cardanon tuotannossa; nimitys Pascalin kolmio tuli käyttöön 1700-luvulla) tarkastelemalla, että vallitsee relaatio

$$\binom{k+1}{k}\sum_{i=1}^{n} i^k + \binom{k+1}{k-1}\sum_{i=1}^{n} i^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{1}\sum_{i=1}^{n} i = (n+1)^{k+1} - (n+1),$$

josta on pääteltävissä – soveltamalla kaavaa peräkkäin arvoilla $k = 1, 2, \ldots$ integrointien kannalta olennainen tieto

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \text{alempia } n\text{:n potensseja.}$$

Pascalin päättely oli olennaisesti seuraava:

$$\begin{aligned}(n+1)^{k+1} - 1^{k+1} &= \sum_{i=1}^{n}\left((i+1)^{k+1} - i^{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=0}^{k}\binom{k+1}{p} i^p \\ &= \sum_{p=0}^{k}\binom{k+1}{p}\sum_{i=1}^{n} i^p = \sum_{p=1}^{k}\binom{k+1}{p}\sum_{i=1}^{n} i^p + n.\end{aligned}$$

Fermat selvitti potenssin integroinnin vielä omalla tavallaan: Jos halutaan laskea käyrän $y = x^n$ alle jäävän alueen ala, 0:n ja pisteen suoran $x = a$ välissä, jaetaan väli $(0, a)$ pisteillä Ea, E^2a, $\ldots$, missä $E < 1$. Approksimoidaan alaa suorakaiteilla, joiden kanta on $E^k a - E^{k+1}a$ ja korkeus $(E^k a)^n$. Suorakaiteiden yhteinen ala on

$$\sum_{k=0}^{\infty}(E^k a)^n(E^k a - E^{k+1}a) = a^{n+1}(1-E)\sum_{k=0}^{\infty} E^{k(n+1)} = \frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\cdots+E^n}.$$

Kun $E \to 1$, niin nimittäjän summa lähenee lukua $n+1$, ja kaava

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

on valmis. Fermat'n menetelmä toimii samoin myös relaation $y^n = x$ eli $y = x^{1/n}$ ja relaation $y^m = x^n$ tapauksessa, eli kun $y = x^{n/m}$.

Englantilainen *John Wallis* (1616–1703), hengenmies, mutta myös 53 vuotta Oxfordin yliopiston matematiikan professorina toiminut, oli varsinaisesti negatiivisten ja murtolukumuotoisten eksponenttien käyttöönottaja. Häneltä on mm. konventio $x^0 = 1$. Wallis esitti 1656 ilmestyneessä teoksessaan *Arithmetica Infinitorum*, että kaava (1) pätee murtolukueksponenteillekin. Hänen päättelynsä perustui eräänlaiseen Pascalin kolmion rivien interpoloimiseen. (Termi *interpolaatio* on lähtöisin Wallisilta.) Se oli varsin spekulatiivinen ja hyväksyttävissä vain, kun n on kokonaisluvun käänteisluku – tällöin on käytettävissä pinta-alojen yksinkertainen yhteenlasku

$$\int_0^1 x^p\,dx + \int_0^1 x^{1/p}\,dx = 1.$$

Sitovamman perustelun yleistä rationaalieksponenttia vastaavassa tapauksessa esitti Fermat. Wallisin päättely on silti mielenkiintoinen osoittaessaan, miten intuitio ohjaa matemaattista keksimistä. Newton seurasi Wallisia luodessaan omille teorioilleen keskeisen binomisarjan.

Wallis päätteli numeerisen evidenssin perusteella, että suhde

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k}$$

lähestyy arvoa $\dfrac{1}{k+1}$. Tämän hän tulkitsi niin, että funktioihin x^k liittyy indeksi $I(x^k)$, joka on $= k$. Wallis havaitsi, että jos funktiot ovat geometrisessa suhteessa, kuten 1, x^2, x^4, x^6 jne., indeksit muodostavat aritmeettisen jonon. Tästä hän rohkeasti yleisti, että geometrisessa suhteessa olevien funktioiden 1, $\sqrt[q]{x}$, $(\sqrt[q]{x})^2$, ..., $(\sqrt[q]{x})^{q-1}$, x indeksit muodostavat myös aritmeettisen jonon. Mutta koska $I(1) = 0$ ja $I(x) = 1$, niin on oltava $I\left((\sqrt[q]{x})^p\right) = \dfrac{p}{q}$. Tässä on murtopotenssin käsitteen ydin (Wallis ei vielä käyttänyt murtopotenssimerkintää.). Ympyrän alan määrittämiseen Wallis tarvitsi funktion $\sqrt{1-x^2}$ integraalia. Interpolointi tunnetuista funktioiden $(1-x^2)^k$, $k \geq 0$ kokonaisluku, integraaleista johti Wallisin lausumaan π:n päättymättömänä tulona

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \ldots};$$

relaatio tunnetaan *Wallisin kaavana.*

Wallis on tiettävästi ensimmäisenä käyttänyt äärettömän merkkiä ∞.

Käyrän pituuden määritys on integrointitehtävänä usein alan tai tilavuuden määritystä hankalampaa. Paraabelin $y = \sqrt{x}$ neliöintiä hyväksi käyttäen 20-vuotias (ja sittemmin unohdettu) englantilainen *William Neil* (1637–70) esitti 1657 ensimmäisen täsmällisen käyrän pituuden määrityksen. Kyseessä oli ns. *semikuubinen paraabeli*, jonka yhtälö on $y^2 = x^3$. Käyrän pituus s välillä (0, 0), $(a, a^{3/2})$ on likimain

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}.$$

Käyrän $z = \sqrt{x}$ alle jäävä pinta-ala välillä $(0, x_i)$ on $A_i = \dfrac{2}{3}x_i^{3/2} = \dfrac{2}{3}y_i$. Koska toisaalta $A_i - A_{i-1} \approx z_i(x_i - x_{i-1})$, on

$$s \approx \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \approx \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + \frac{9}{4}z_i^2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{3}{2}(x_i - x_{i-1})\sqrt{x_i + \frac{4}{9}}.$$

Viimeinen summa liittyy paraabelin $y = \sqrt{x + \dfrac{4}{9}}$ neliöintiin; haetuksi pituudeksi saadaan lopulta $s = \dfrac{(9a+4)^{3/2} - 8}{27}$.

Samoin kuin Wallis tuli palvelleeksi Newtonia, Leibniz hyödynsi Pascalin havaintoa ympyränkaareen liittyvästä "*karakteristisesta kolmiosta*". Olkoon O yksikköympyrän keskipiste, A kehän piste, C A:n projektio x-akselilla, MLK pieni suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa ML sivuaa ympyrää pisteessä A ja jonka kateetit KL ja MK ovat x- ja y-akselien suuntaiset. Silloin kolmiot AOC ja LMK ovat yhdenmuotoiset. Jos $AO = r$ ja $AC = y$, $ML \approx r\,d\phi = ds$, $KL = dx$, niin $y\,ds = r\,dx$. Näistä havainnoista Pascal johti olennaisesti kaavaa

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin\phi\, d\phi = \cos\alpha - \cos\beta$$

vastaavan tuloksen samoin kuin pallon alan ($2\pi y d\phi$ on pallon kiertävän infinitesimaalisen vyöhykkeen ala).

7.6 Tangenttikonstruktioita

Matemaattisen analyysin historiassa differentiaalilaskenta astuu esiin vasta integraalilaskennan jälkeen, toisin kuin aineen alkeisopetuksessa nykyisin. Ensimmäiset infinitesimaaliset tangentinmääritykset tehtiin vuoden 1630 vaiheilla, analyyttisen geometrian luojien toimesta. Fermat'n maksimiperiaate oli ensimmäisiä analyyttisia tangentinmäärityksiä: löytääkseen funktion f maksimikohdan Fermat kirjoitti yhtälön $f(x + E) = f(x)$, jakoi yhtälön puolittain E:llä, asetti $E = 0$ ja ratkaisi x:n. Raja-arvon käsite ei ollut Fermat'lle tuttu, mutta hänen menettelynsä on ilmeistä sukua erotusosamäärän raja-arvon määritykselle.

Ensimmäinen Fermat'n käsittelemä ääriarvotehtävä oli janan AB jakaminen janoiksi AC, CB niin, että $AC \cdot CB$ on mahdollisimman suuri. Jos $AB = a$, $AC = x$ ja C' on toinen C:n lähellä oleva piste niin, että $CC' = e$, niin $AC \cdot CB \approx AC' \cdot C'B$ eli $x(a - x) \approx (x + e)(a - x - e)$ eli $e(2x - a + e) \approx 0$ eli $2x - a + e \approx 0$. Kun nyt asetetaan $e = 0$, saadaan ratkaisu $x = \dfrac{1}{2}a$, eli todetaan, että annetun piirin omaavista suorakaiteista neliö on alaltaan suurin.

Vastaavalla tavalla Fermat ratkaisi käyrän tangentin tai oikeastaan sivuamispisteen ja x-akselin välisen tangentin osan projektion x-akselilla eli *alitangentin*. Olkoon käyrä $y = x^n$

ja P sen piste. P:n kautta piirretty tangentti leikkaa x-akselin pisteessä T; P:n projektio x-akselilla on N. Jos N' on toinen x-akselin piste, $NN' = e$ ja P' on se käyrän $y = x^n$ piste, jonka projektio N' on, ja vielä P:n kautta piirretty tangentti leikkaa suoran $P'N'$ pisteessä S ja P:n kautta piirretty x-akselin suuntainen suora pisteessä R, ja $TN = t$, $P'R = d$, niin kolmioiden PNT ja SRP yhdenmuotoisuuden perusteella $t = TN = \dfrac{PN}{SR} \cdot PR \approx \dfrac{ye}{d}$. Mutta $y + d = (x + e)^n = x^n + nx^{n-1}e+$ e:n korkeampia potensseja, joten $\dfrac{d}{e} \approx nx^{n-1}$. Siis $t = \dfrac{y}{nx^{n-1}} = \dfrac{x}{n}$.

Fermat esitti valon liikettä koskevan variaatioperiaatteen, *Fermat'n periaatteen*, jonka mukaan valo valitsee aina sellaisen etenemistien, jota pitkin pääsee nopeimmin pisteestä toiseen. Heijastumiseen sovellettuna tämä johti helposti heijastuslakiin, jonka mukaan tulo- ja lähtökulmat ovat samat, ja väliaineesta toiseen siirtyvän valon kohdalla *Snellin lakiin*. Snellin lain olivat aikaisemmin esittäneet hollantilainen fyysikko *Willebrord Snell* (1580–1626) ja Descartes. Snell oli keksinyt myös kolmiomittauksen ja käyttänyt sitä maan säteen tarkkaan määritykseen.

Descartes puolestaan konstruoi käyrälle annettuun pisteeseen normaalin vaatimalla, että yhtälöllä, jonka määrittelevät käyrä ja leikkauspisteen kautta kulkeva ympyrä, on kaksoisjuuri leikkauspisteessä. Kun lisäksi vaaditaan, että ympyrän keskipiste on annetulla suoralla, saadaan käyrän normaali leikkauspisteen kautta piirretyn ympyrän säteen suunnasta.

Descartesin menetelmällä paraabelin $y = x^2$ tangentti pisteessä $(a,\, a^2)$ löytyisi seuraavasti. Pisteen $P = (a,\, a^2)$ kautta kulkevan ja piste $(b,\, 0)$ keskipisteenä olevan ympyrän säde r toteuttaa ehdon $r^2 = (b - a)^2 + a^4$. Jos tämän ympyrän yhtälöstä $(x - b)^2 + y^2 = r^2$ ja paraabelin yhtälöstä $y = x^2$ eliminoidaan y, saadaan yhtälö $(x - b)^2 + x^4 - (b - a)^2 - a^4 = (x - a)(x + a - 2b) + (x - a)(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3) = 0$. Jotta a olisi yhtälön kaksoisjuuri, on oltava $2a - 2b + 4a^3 = 0$ eli $b - a = 2a^3$. Pisteen P kautta kulkevan normaalin kulmakerroin on $-\dfrac{a^2}{b-a} = -\dfrac{1}{2a}$. Tästä saadaan tangentin kulmakertoimeksi $2a$, niin kuin pitääkin. – Descartes piti normaalin ja tangentin määritystä suurimpana saavutuksenaan: "Uskallan sanoa, että tämä [normaalin määritys] ei ole pelkästään hyödyllisin ja yleisluontoisin geometrian probleema niiden joukossa, jotka osaan ratkaista, vaan myös niiden joukossa, joita koskaan olen toivonut osaavani ratkaista."

Fermat'n ja Descartesin esittämiä komplisoituja tangentinmääritysmenetelmiä yksinkertaistivat hollantilainen *Johann Hudde* (1628–1704) ja flaamilainen *René François de Sluse* (1622–85). He johtivat laskennallisempia menetelmiä tangentinmäärityksessä esiintyvien kaksoisjuurten määrittämiseksi. Hudden menetelmä oli seuraavanlainen. Olkoon

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Muodostetaan uusi polynomi G kertomalla F:n kertoimet aritmeettisen jonon a, $a + b$,

$a + 2b, \ldots, a + nb$ luvuilla. Siis

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(a + kb)x^k.$$

Silloin F:n kaksoisjuuri e on G:n juuri: jos

$$F(x) = (x - e)^2 \sum_{k=0}^{n-2} c_k x^k = \sum_{k=0}^{n-2} c_k(x^{k+2} - 2ex^{k+1} + e^2x^k),$$

ja jos $A_k = a + kb$, niin

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n-2} c_k(A_{k+2}x^{k+2} - 2eA_{k+1}x^{k+1} + e^2A_kx^k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} c_k \left((A_k + 2b)x^2 - 2e(A_k + b)x + e^2A_k\right) x^k = \sum_{k=0}^{n-2} c_k \left(A_k(x - e)^2 + 2bx(x - e)\right) x^k.$$

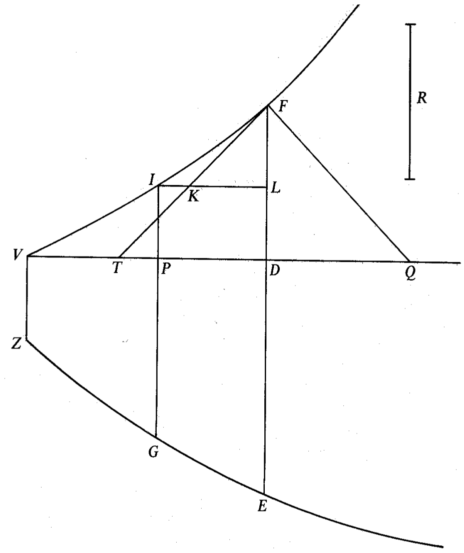
Jos $a = 0$ ja $b = 1$, niin $G(x) = xF'(x)$; Hudden sääntö tulee määrittäneeksi polynomin derivaatan puhtaasti algebrallisen manipulaation tuloksena.

Tangentinmäärityksiä tehtiin myös mekaanisin perustein. Näin toimi mm. Roberval: jos käyrän ajatellaan syntyvän massapisteen liikkuessa, on pisteen hetkellisen nopeuden suunta tangentin suunta. Jos käyrä voidaan tulkita kahden eri liikkeen yhdistelmäksi (kuten sykloidi, jossa yhdistyvät translaatio ja rotaatio, kumpikin vakionopeuksisena), tangentti määritetään nopeuksien yhteenlaskun periaatteella. Kun paraabeli tulkitaan sellaisen pisteen liikkeenä, jonka etäisyys polttopisteestä ja johtosuorasta on sama, voidaan paraabelin tangentin suunta saada polttopisteestä pois suuntautuvan ja johtosuoraa vastaan kohtisuorassa olevien yhtä pitkien vektorien summana. Tästä nähdään heti, että paraabelin tangentti puolittaa polttosäteen ja johtosuoraa vastaan piirretyn kohtisuoran välisen kulman.

7.7 Barrow: melkein differentiaali- ja integraalilaskennan peruslause

Erotusosamäärän raja-arvon idea tangentin yhteydessä tulee selvästi esiin Newtonin opettajan, Cambridgen matematiikan professorin *Isaac Barrow'n* (1630–77) 1660-luvulla pitämissä luennoissa, joissa tangentti tulkitaan kahden lähekkäin olevan käyrän pisteen kautta kulkevan suoran raja-asennoksi, kun pisteet ovat lähellä toisiaan. Tämä raja-asento voitiin laskea jättämällä korkeamman kertaluvun infinitesimaalit pois.

Barrow oli ensimmäinen, joka todisti, että sellaisen käyrän $\mathcal{C}_1$, joka esittää toisen käyrän $\mathcal{C}_2$, x-akselin ja y-akselin suuntaisten suorien rajoittaman alueen pinta-alaa, tangentti saadaan suoraan käyrän $\mathcal{C}_2$ avulla. Merkitään kuvion alaa itseisarvomerkein. Jos $\mathcal{C}_2 = ZGE$ on käyrä, jonka pisteet etääntyvät akselista VPD ja jos $\mathcal{C}_1 = VIF$ on käyrä, jonka jokaisen pisteen F etäisyys akselista FD toteuttaa ehdon $FD \cdot R = |ZEDV|$, missä R on kiinteänpituinen jana, ja jos T valitaan akselilta niin, että $\dfrac{DE}{DF} = \dfrac{R}{DT}$, ja jos I on



Barrow'n päättely

V:n ja F:n välissä oleva $\mathcal{C}_1$:n piste, $IL \| VD$, $IPG \| FDE$ ja K FT:n ja IL:n leikkauspiste, niin $\dfrac{LF}{LK} = \dfrac{DF}{DT} = \dfrac{DE}{R}$. Mutta $LK \cdot DE = R \cdot LF = |GEDP| < PD \cdot DE$, joten $LK < PD = IL$. FT kulkee käyrän $\mathcal{C}_1$ alapuolella. Samoin nähdään, että FT:n jatkekin kulkee $\mathcal{C}_1$:n alapuolella, joten FT on käyrän $\mathcal{C}_1$ tangentti.

Barrow esitti tämän asian, joka on olennaisesti sama kuin differentiaali- ja integraalilaskennan peruslause, pelkästään geometrisena totuutena. Asiaan sisältyvää funktioiden relaatiota hän ei käsitellyt, joten hänen tulostaan ei varsinaisesti voi pitää integraalilaskennan peruslauseena.

Barrow halusi suuntautua teologiaan. Hän luopui matematiikan professuuristaan Isaac Newtonin hyväksi vuonna 1669.

8 Newton ja Leibniz

Useimmat differentiaali- ja integraalilaskennan keskeiset ideat olivat olemassa jo 1600-luvun puoliväliin mennessä. Kuitenkin vasta *Isaac Newton* (1642–1727) ja *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) oivalsivat pinta-alanmääritys- ja tangenttitehtävien yhteyden sekä kehittivät aiemmin yksittäisiin tehtäviin sovelletuista keinoista yhtenäisen laskennallisen metodin, *kalkyylin*. Newtonin ja Leibnizin jäljiltä differentiaali- ja integraalilaskenta ei ollut enää kokoelma lähinnä euklidisen geometriaan pohjaavia erillistemppuja. Aikanaan väiteltiin paljon siitä, olivatko keksijät itsenäisiä vai jäljittelikö Leibniz Newtonia. Myös toiseen suuntaan tapahtuneesta plagionnista esitettiin aikanaan väitteitä. Tarkempien todisteiden puutteessa on varminta olettaa, että Newton ja Leibniz kehittivät oppirakennelmansa toisistaan riippumatta. Kumpikin rakensi jo olemassa olleen tiedon varaan. Newtonin ja Leibnizin differentiaali- ja integraalilaskenta ei ollut matemaattisesti samalla tavoin vastaansanomattoman täsmällistä kuin esimerkiksi Eukleideen geometria. Vasta 1800-luku toi täsmällisyyden analyysiin. Tuloksia ja sovelluksia kalkyyli sai jo sitä ennen yllin kyllin.

8.1 Binomisarja

Ajan tavan mukaan klassisiin kieliin keskittyneen koulutuksen saanut Newton kiinnostui matematiikasta vasta opiskeluvuosinaan Cambridgessa, jossa matematiikkaa opetti Isaac Barrow. Suurimmat tieteelliset keksintönsä *binomisarjan, differentiaali- ja integraalilaskennan* sekä *yleisen painovoimalain*, hän teki vuosina 1665–66, vielä opiskelijana, kun yliopisto oli suljettuna kulkutautiepidemian vuoksi. Kuten Newton itse vanhana kirjoitti:

> ”*All this was in the two plague years 1665 & 1666 for in those days I was in the prime of my age for invention and minded Mathematics and Philosophy more than at any time since.*”

Newtonin matematiikan keskeisin työkalu oli binomisarja, nykymerkinnöin

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{6}x^3 + \cdots .$$

Binomisarja on positiivisen kokonaislukueksponentin tapauksessa vanhastaan tunnettu binomikaava. Se on olennaisesti sama asia kuin Pascalin kolmio. Newton ei kuitenkaan johtunut binomisarjaan suoraan binomikaavaa yleistämällä. Tosiasiassa hän tutki Wallisin määrittämiä käyrien $y = (1-x^2)^{n/2}$ alle jääviä pinta-aloja, jotka parillisilla n:n arvoilla ovat x:n polynomeja. Parittomia n:n arvoja vastaavat alat Wallis sai parillisista tietyllä interpolointimenettelyllä. Newtonin keskeinen huomio oli, että myös itse $(1-x^2)^{n/2}$ voitiin parittomilla n:n arvoilla interpoloida tunnetuista parillisten arvojen lausekkeista pinta-alakaavojen kanssa yhteensopivalla tavalla. Tämä interpoloimalla saatu kaava oli sitten yleistettävissä mielivaltaisille eksponenteille.

Newtonin binomisarja tuli julkisuuteen 1676, kirjeessä, jonka Newton lähetti Lontoon Royal Societyn sihteerille. Kaava oli tuolloin muodossa

$$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DC + \text{etc.}$$

Yhtäläisyys nykymuodon kanssa paljastuu, kun ottaa huomioon, että symbolit A, B, C jne. viittaavat aina summan edelliseen termiin. Binomisarja, vaikkakin ilman suppenemistarkasteluja, antoi matematiikan käyttöön erittäin tärkeän uuden työkalun, mahdollisuuden esittää funktioita äärettömien prosessien avulla, ei ainoastaan approksimaatioina vaan tarkasti. – Newtonin binomisarjatiedonannossa esiintyvät murtolukueksponentit ja negatiiviset eksponentit ensi kerran nykyasussaan – Wallisin käyttämät "indeksit" olivat samansisältöisiä, mutta merkintätapa on Newtonin.

8.2 Newtonin differentiaali- ja integraalilaskenta

Newtonin ensimmäinen differentiaali- ja integraalilaskentaa käsittelevä käsikirjoitus on vuodelta 1666, ja vuonna 1669 kirjoitettu *De analysi per æquationes numero terminorum infinitas* liikkui käsikirjoituksena Englannissa. Newtonin lopullinen differentiaali- ja integraalilaskennan esitys oli 1671 kirjoitettu *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, joka tuli kuitenkin vasta 1736 postuumina julkisuuteen.

Newtonin differentiaalilaskennan perustana oli fysikaalinen analogia: käyrän voi ajatella syntyvän kahdella akselilla liikkuvien pisteiden liikkeiden yhdistämisestä. Jos x ja y ovat ajan funktioita, Newtonin sanastossa *fluentteja*, niin ne saavat lyhyenä aikana o lisäykset po ja qo. Käyrän $f(x,y) = 0$ tangentin kulmakerroin on $\frac{q}{p}$ eli y:n ja x:n hetkellisten muutosten suhde. Tämän suureen laskemiseksi Newton käytti binomisarjaa. Esim. käyrän $y^n = x^m$ kulmakertoimen määrittämiseksi lasketaan binomisarjasta ja yhtälöstä $(y+oq)^n = (x+op)^m$ ja o:lla jakaen ja sen jälkeen o-termit unohtaen

$$\frac{q}{p} = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{y^{n-1}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}.$$

Differentiaali- ja integraalilaskennan kehityksen ratkaiseva askel oli derivointi- ja integrointioperaatioiden käänteisyyden havaitseminen. Tämän huomion Newton teki tarkastellessaan käyrän $y = f(x)$ alle jäävää pinta-alaa: jos kyseinen ala on esim.

$$z = \frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$$

ja x:lle annetaan lisäys o, niin z:n saama lisäys on oy ja yhtälöstä

$$z + oy = \frac{n}{m+n}a(x+o)^{\frac{m+n}{n}}$$

saadaan jälleen binomisarjaa käyttämällä $y = ax^{\frac{m}{n}}$. Potenssifunktiota monimutkaisempien funktioiden analyysi palautui potensseihin binomisarjan kautta. Sarjojen käsittelyyn liittyvät suppenemisongelmat olivat myös jossain määrin Newtonin huomion kohteina, vaikkakaan hän ei niitä varsinaisesti käsitellyt.

Newton nimitti fluenttiensa eli funktioidensa x ja y "aikaderivaattoja" p ja q *fluksioiksi*; niiden merkinnät olivat $\dot{x}$, $\dot{y}$. Vastaavasti fluentteja, joiden fluksiot ovat x, y merkittiin $\acute{x}$, $\acute{y}$. Nämä merkinnät säilyivät Brittein saarilla 1800-luvun lopulle asti, ja mekaniikassa niitä käytetään vielä nykyäänkin. Fluksiolaskennan piiriin kuului kahdenlaisia tehtäviä: fluenttien välisistä relaatioista johdettiin fluenttien ja niiden fluksioiden välisiä relaatioita tai fluenttien ja fluksioiden välisistä relaatioista pelkkien fluenttien relaatioita. Edellinen tehtävä vastaa derivointia ja jälkimmäinen differentiaaliyhtälön ratkaisemista. Differentiaalilaskennan perusrelaatioista esim. yhdistetyn funktion derivoinnin ketjusääntö on helposti ymmärrettävissä.

Analyysin perusteiden kannalta olennainen raja-arvon käsite ei ollut Newtonille aivan selvä. "Pienet lisäykset" ovat tarpeen mukaan tasan nollia, jolloin ne voidaan pyyhkiä pois, tai pieniä nollasta eroavia lukuja, jolloin niillä voi supistaa. Derivaattaa määritellessään Newton käyttää puhetapaa *häviävien suureiden viimeinen suhde* tai *syntyvien suureiden ensimmäinen suhde*, silloin kun nykymatematiikka tarkastelee raja-arvoa

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{g(h)}.$$

Vaikka Newtonin teorian looginen perusta jää epävarmaksi, hän kehitti aikaisempia yksittäistapauksia tarkastelleita integrointi- ja derivointimenetelmiä paljon käyttökelpoisemman yhtenäisen differentiaali- ja integraalilaskennan, *kalkyylin*, johon sisältyivät useimmat tälle menetelmälle tyypilliset keinot kuten ketjusääntö ja integrointi sijoitusmenetelmällä.

Newtonin pääteos on monumentaalinen *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687), mekaniikan ja gravitaation yleisesitys. Principian matemaattiset metodit ovat lähes kauttaaltaan traditionaalisia. On arveltu, että Newton olisi johtanut Principian tulokset differentiaali- ja integraalilaskennan avulla ja pukenut sitten todistukset euklidiseen asuun. Tätä väitettä ei ole voitu todentaa. Newton ei juuri julkaissut elinaikanaan puhtaasti matemaattisia töitä. Ensimmäinen painettu versio hänen differentiaali- ja integraalilaskennastaan oli 1704 ilmestyneen *Opticks*-teoksen liitteenä julkaistu *De quadratura curvarum*, ja hänen tärkein matemaattinen tutkielmansa oli *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, joka kirjoitettiin 1671, mutta julkaistiin vasta 1736.

Viimeksi mainitussa teoksessa Newton esittää myös sittemmin *Newtonin menetelmän* tai *Newtonin–Raphsonin* (*Joseph Raphson*, 1648–1715) nimellä tunnetun likimääräisen menetelmän yhtälön ratkaisemiseksi. Tämä menetelmä perustuu funktion kuvaajan korvaamiseen funktion tangentilla. Newton kuitenkin johti menetelmän binomisarjan avulla. Jos ratkaistavana on yhtälö $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, ja x_1 on jokin ratkaisun x likiarvo , niin $f(x_1 + p) = f(x_1) + na_npx_1^{n-1} + (n-1)a_{n-1}px_1^{n-2} + \ldots + a_1p + p$:n korkeampia potensseja, joten $f(x_1+p) = 0$ toteutuu likimain silloin, kun $p = -\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. Tässä $f'(x)$ on $f(x)$:n "muodollinen derivaatta" eli polynomi $na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots$. Luku $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ on uusi likiarvo yhtälön ratkaisulle jne.

Approksimaatiomenetelmäänsä Newton käytti uusien sarjakehitelmien muodostamiseen "sarjoja kääntämällä". Esimerkiksi *Nicolaus Mercatorin* (1620–87) (joka on eri henkilö kuin Mercatorin projektion esittäjä Gerhard Mercator l. Kremer) ja Newtonin itsensä johtamasta käyrän $y(1+x) = 1$ ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alan (eli $\ln(1+x)$:n) sarjasta $z(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \ldots$ Newton ratkaisi $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \ldots$, eli sai eksponenttifunktion $e^z - 1$ sarjan. Samoin Newtonin binomikaavan johdon yhteydessä saama integraalin

$$\int_0^x (1-t^2)^{1/2}\,dt$$

sarja antaa välittömästi sarjan sellaisen ympyränsektorin alalle, jonka keskuskulma θ toteuttaa ehdon $x = \sin\theta$; tästä θ:n sarjasta ratkaisemalla Newton johti $\sin x$:n ja $\cos x$:n sarjojen alut, joiden hän sitten tunnisti olevan muotoa

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots, \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots.$$

Newtonin panos analyyttisen geometrian kehitykselle on myös merkittävä. Hän suoritti kolmannen asteen käyrien luokittelun, jota pidetään ensimmäisenä täysin uutena analyyttisen geometrian avulla saavutettuna tuloksena – aikaisemmin oli vain johdettu uudelleen mm. Apollonioksen jo tuntemia totuuksia.

Newton toimi 30 vuotta Cambridgen yliopiston professorina – tähän asemaan hän pääsi Barrowin luovuttua 1669 vapaaehtoisesti oppituolistaan lahjakkaan oppilaansa hyväksi – ja myöhemmin Englannin rahapajan johtajana. Newtonin toiminta yliopistonopettajana ei juuri jättänyt pysyviä jälkiä. Huomattavan osan tieteellisistä ponnisteluistaan Newton omisti alkemistisille yrityksille muuttaa halpoja metalleja kullaksi sekä teologialle – Newton oli erityisen kiinnostunut varhaiskristillisyydestä ja aikoinaan kolminaisuusopille hävinneestä areiolaisuudesta.

8.3 Leibniz

Filosofi ja yleisnero Leibniz oli kotoisin Leipzigista. Hän oli poikkeava lahjakkuus jo nuorena: Leipzigin yliopiston kateelliset professorit hylkäsivät hänen filosofian alaan kuuluneen loistavan väitöskirjansa, koska tekijä oli liian nuori, vain 20-vuotias. (Tohtorinarvonsa Leibniz toki sai seuraavana vuonna Nürnbergin yliopistosta, juridiikan opetusta käsittelevällä työllä, jonka hän oli kirjoittanut matkalla Leipzigista Nürnbergiin.) Leibnizin leipätyönä olivat diplomaattiset ja hallintotehtävät, ensin Mainzin arkkipiispan ja sitten Hannoverin vaaliruhtinaan palveluksessa. Leibnizin aikaansaannokset ulottuvat filosofian ja matematiikan lisäksi ainakin juridiikan, politiikan, teologian, historian, geologian ja fysiikan aloille. Vuonna 2000 esitetyn arvion mukaan hänen teostensa kokonaisjulkaisu valmistuu noin vuonna 2055. Matemaatikkona Leibniz oli itseoppinut ja tuli itseoppineiden tapaan keksineeksi uudelleen monia jo entuudestaan tunnettuja asioita.

Matematiikan historiassa Leibniz muistetaan paitsi differentiaali- ja integraalilaskennan toisena keksijänä myös symbolisen logiikan ja laskemisen mekaanisten apukeinojen edelläkävijänä. Hän kaavaili *universaalikalkyylia*, jota käyttäen kaikki filosofian ongelmat voitaisiin yksiselitteisesti ratkaista laskemalla. Leibniz rakensi laskukoneita ja ennusti niille tulevaisuutta: ”Ei ole järkevää, että viisaat miehet kuluttavat orjien tavoin tuntikausia laskutoimituksiin, jotka kuka tahansa voisi helposti suorittaa koneiden avulla.”

Leibniz on jossain määrin itse kuvaillut differentiaali- ja integraalilaskentaan johtaneiden ajatustensa kehitystä. Newtonin tavoin myös hän sai ensimmäiset herätteet differentiaali- ja integraalilaskentaan päättymättömistä sarjoista. Sarjateoriassa Leibnizin oivallus oli tarkastella sarjan termejä jonkin lukujonon peräkkäisten termien erotuksena. Näin hän esim. pystyi laskemaan summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Tämän ongelman Leibnizille oli esittänyt hollantilainen *Christiaan Huygens* (1629–95), yksi 1600-luvun merkittävimmistä oppineista. Yleisemmin Leibniz kehitti Pascalin kolmiota muistuttavan *harmonisen kolmion*, jonka ylin rivi on harmoninen sarja ja muut alkiot kukin kahden ylempänä olevan alkion erotuksia:

$$\begin{array}{llllll}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \cdots & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \cdots & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \cdots & & & \\
\frac{1}{5} & & & & &
\end{array}$$

Toisesta rivistä alkaen kunkin vaakarivin alkioiden summa on välittömästi yläpuolella olevan rivin ensimmäinen alkio. Tälle ilmiölle on sukua funktion kuvaajan alle jäävän pinta-alan lausuminen toisaalta funktion integraalifunktion "viereisten arvojen" erotuksien summana, toisaalta alkuperäisen funktion arvojen summana. Leibnizin ensimmäiset askeleet differentiaali- ja integraalilaskentaa kohti koskivat sellaisia "funktioita" $y = y(x)$, joissa x oli ymmärrettävä termin järjestysluvuksi ja "dx" on 1. Näitä askeleita voi seurata Leibnizin jälkeensä jättämistä muistiinpanoista.

Vuonna 1673 Leibniz tutustui aikaisemmin mainittuun Pascalin sinifunktiota käsittelevään tutkimukseen. Tällöin hänelle valkeni "karakteristisen kolmion" (dx, dy, ds) yleinen käyttökelpoisuus; yksinkertainen geometrinen tarkastelu johti pinta-alanmäärityksen, "integroimisen", tehtäväksi, jossa on konstruoitava käyrä, kun sen tangentit tunnetaan. Pascal oli tarkastellut vain r-säteisen ympyränkehän erikoistapausta, ja päätynyt karakteristisen kolmion ja kolmion, jonka kärjet ovat ympyrän keskipiste, kehän piste ja sen projektio x-akselilla, yhdenmuotoisuudesta olennaisesti relaatioon

$$\int y\, ds = \int r\, dx,$$

jonka perusteella esim. pallon alan laskeminen käy helposti. Leibniz havaitsi, että karakteristisen kolmion avulla voitiin minkä hyvänsä käyrään liittyviä "integrointeja" muuntaa. Erityisesti, jos käyrään $y = f(x)$ liitettiin käyrän tangentin avulla määriteltävä toinen käyrä $z = y - x\dfrac{dy}{dx}$, niin geometrisin argumentein voi päätellä, että

$$\int_a^b y\, dx = \frac{1}{2} \left(bf(b) - af(a) + \int_a^b z\, dx \right).$$

Kun Leibniz sovelsi tätä transmutaatiokaavaksi nimittämäänsä kaavaa ympyrän neljännekseen, hän johtui nimeään kantavaan sarjaan

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots.$$

Pari vuotta myöhemmin Leibniz hallitsi derivoinnin ja integroinnin nykyisin differentiaalimerkinnöin. Alkuaan Leibniz merkitsi muuttujan y kahden vierekkäisen arvon infinitesimaalista erotusta symbolilla ℓ ja muuttujien summaa omn.ℓ. Siten esim. $\frac{1}{2}y^2 = \int y\,dy$ merkittiin

$$\frac{\overline{\text{omn.}\ell}^2}{2} = \text{omn.}\overline{\overline{\text{omn.}\ell}\frac{\ell}{a}}$$

($a = 1$ on mukana dimensiosyistä ja kaavan ylle vedetty viiva tarkoittaa samaa kuin nykyisin kaavan kirjoittaminen sulkumerkkien sisään). Vuonna 1675 valmistuneessa käsikirjoituksessa Leibniz korvaa omn.-merkinnän integraalimerkillä $\int$, ja hiukan myöhemmin ℓ:n operaatiomerkinnällä d. Pohdiskeltuaan kysymystä, onko $d(uv) = du\,dv$, ja todettuaan, että joka tapauksessa $d(x^2) = (x+dx)^2 - x^2 = 2x\,dx + (dx)^2 = 2x\,dx$, Leibniz päätyy oikeisiin differentiointisääntöihin. Differentiaali- ja integraalilaskennan peruslauseeseen Leibniz päätyy huomattuaan, että käyrään, jonka ordinaatat ovat z, liittyvä pinta-ala saadaan selville, jos löydetään käyrä, jonka ordinaatat y toteuttavat ehdon $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z}{a}$ (a jälleen dimensiotekijä). Tällöin on $z\,dx = a\,dy$, joten kysytty ala on

$$\int z\,dx = a\int dy = ay.$$

Leibnizin käyrät kulkivat yleensä origon kautta.

Leibniz alkoi 1684 julkaista differentiaalilaskentaansa koskevia tiedonantoja toimittamassaan *Acta Eruditorum Lipsienium* (Leipzigin oppineiden toimituksia) -nimisessä aikakauskirjassa, jossa useimmat varhaiset leibniziläistä analyysiä koskevat tiedonannot julkaistiin. Ensimmäiseen, kuusisivuiseen julkaisuun sisältyi myös ensimmäinen uuden analyysin fysikaalinen sovellus: valon taittumista kahden väliaineen rajapinnassa koskevan *Snellin lain* johto "kuin taikatempulla". – 1600-luvun oppineitten lähes ainoa keino kertoa suhteellisen nopeasti tuloksistaan oli kirjeenvaihto; tieteellisten aikakauslehtien syntyminen vilkastutti merkittävästi tiedonvälitystä.

Leibnizin käyttämät symbolit olivat onnistuneita. Vaikka dx:n ja dy:n täsmällistä merkitystä ei määritelläkään, niillä operoiminen on intuitiivisesti selvää ja johtaa oikeisiin tuloksiin. "Ketjusääntö" "$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$" on ymmärrettävä muodossa

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

ja vaikkapa osamäärän derivointikaavan johto muodossa

$$d\frac{y}{x} = \frac{y+dy}{x+dx} - \frac{y}{x} = \frac{xy + xdy - xy - ydx}{x^2 + xdx} = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

on intuitiivisesti selvä. Leibniz oli myös ensimmäisiä sellaisten termien kuin *funktio, vakio, muuttuja* ja *parametri* käyttäjiä.

Osittain juuri tällaisista syistä infinitesimaalilaskennan kehitys lähti liikkeelle Leibnizin osoittamaan suuntaan. Newtonia seurattiin vain Englannissa, jossa kehitys oli selvästi hitaampaa kuin mannermaalla, ilmeisesti ainakin osittain Newtonin merkintöjen pienemmän suggestiivisuuden vuoksi. – Toinen syy Englannin matematiikan taantumiseen oli onneton prioriteettikiista, jota käytiin vuodesta 1699 alkaen: syytös oli, että Leibniz olisi kopioinut Newtonin ideat; englantilaiset kieltäytyivät isänmaallisista syistä hyväksymästä Leibnizin merkintöjä ja analyysiä. Itse asiassa Newton ja Leibniz olivat käyneet vuosina 1676 ja -77 lyhyen kirjeenvaihdon differentiaalilaskennan perusteista, jotka molemmilla jo tuolloin oli hallussa, eikä ole syytä uskoa kummankaan kopioineen toiselta.

9 1700-luku, analyysin nopean kehityksen vuosisata

Infinitesimaalilaskennan keksiminen sysäsi matemaattisen analyysin erittäin nopeaan kehitykseen. Uusia laskennallisia, ”algebrallisia” menetelmiä käytettiin osin kritiikittömästi ja teorioiden loogisiin perusteisiin ehdittiin kiinnittää niukasti huomiota. Tekniseltä kannalta differentiaali- ja integraalilaskenta saavutti 1700-luvulla monin osin nykyisen tason. Toisaalta 1700-luku ei tuonut matematiikkaan siinä määrin vallankumouksellista uutta kuin edellinen vuosisata.

9.1 Bernoullit

Alankomaista 1500-luvun lopulla Sveitsin Baseliin siirtynyt *Bernoullin* suku on matematiikan historian merkittävimpiä. Siihen kuuluu tusinan verran ensi luokan tiedemiehiä. Suvun matemaatikoista kuuluisimmat ovat veljekset *Jakob* (1654–1705) ja *Johann* (1667–1748) *Bernoulli.* (Erikielisissä lähteissä etunimet kirjoitetaan myös esim. *Jacques* ja *Jean* tai *James* ja *John.*) Bernoullin veljekset olivat Leibnizin oppilaita, työtovereita ja myös kilpailijoita. Erityisesti Johann arvosteli usein vanhempaa veljeään kärkevästi, ja Leibniz yritti sovitella. Veljekset vaikuttivat merkittävästi siihen, että differentiaali- ja integraalilaskenta levisi juuri Leibnizin luomassa muodossa.

Jakob Bernoulli esitti *Bernoullin epäyhtälön* $1 + nx < (1 + x)^n$, todisti harmonisen sarjan hajaantuvaksi (Oresmen aikaisempi todistus oli unohdettu) ja tutki erilaisia käyriä differentiaali- ja integraalilaskentaa ja differentiaaliyhtälöitä käyttäen. Sana *integraali* on Jakob Bernoullin vuonna 1690 käyttöön ottama. Leibniz, joka oli käyttänyt integraalilaskennasta nimitystä *calculus summatorius*, omaksui myöhemmin myös integraali-sanan. Bernoulleilta ovat lähtöisin useat tavanomaiset integrointitekniikat. Esim. integraalin

$$\int \frac{a^2\,dx}{a^2 - x^2}$$

laskemiseksi Jakob Bernoulli keksi käyttää muuttujanvaihtoa

$$x = a\frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2},$$

kun taas Johann huomasi tehokkaamman osamurtohajotelman

$$\frac{a^2}{a^2 - x^2} = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a + x} + \frac{1}{a - x}\right).$$

Leibniz ja Bernoullit tutkivat paljon ns. *brakistokroniongelmaa.* Tarkoitus oli löytää käyrä, jota pitkin painovoiman vaikutuksen alaisena liikkuva kappale siirtyisi nopeimmin pisteestä

A pisteeseen B, joka ei ole suoraan A:n alapuolella. Jakob Bernoullin onnistui ensimmäisenä osoittaa, että kyseinen kaari on sykloidin kaari. Brakistokroniongelmasta katsotaan saaneen alkunsa *variaatiolaskennan*, matematiikan haaran, joka etsii ääriarvotehtäviin vastaukseksi funktioita eikä vain luvuin ilmaistavia ääriarvokohtia. Itse asiassa Newton oli tässäkin ensimmäinen keksijä: hän ratkaisi jo aikaisemmin ongelman, jossa etsittiin sellaisen kappaleen muotoa, jonka vastus väliaineessa olisi mahdollisimman pieni.

Muita variaatio-ongelmia olivat *isokroniongelma* jossa etsittiin käyrää, jota pitkin kappale vierii käyrän minimikohtaan samassa ajassa alkupisteestä riippumatta, ja *katenaari-* eli ketjukäyräongelma, kysymys vapaasti riippuvan köyden muodosta. Huygens oli ratkaissut isokroniongelman lähinnä geometrisesti jo aikaisemmin, mutta Jakob Bernoulli onnistui 1690 johtamaan käyrälle differentiaaliyhtälömuotoisen ratkaisun. Katenaariongelman oli esittänyt Leonardo da Vinci, ja Galileo Galilei oli väittänyt sen ratkaisun olevan paraabeli. Johann Bernoulli puolestaan johti katenaarin differentiaaliyhtälön, muttei kuitenkaan osannut sitä integroida. – Ratkaisukäyräksi on sittemmin osoittautunut hyperbolisen kosinifunktion kuvaaja.

Jakob Bernoulli pohti myös sarjaa

$$\sum \frac{1}{n^2},$$

jonka hän tiesi suppenevaksi majoranttisarjan

$$\sum \frac{1}{n(n-1)}$$

perusteella. Toisaalta Bernoullit ja heidän aikalaisensa käsittelivät päättymättömiä sarjoja sangen huolettomasti. Jakob Bernoulli, joka kyllä todisti harmonisen sarjan hajaantuvaksi, päätteli ”identiteeteistä”

$$N = \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \cdots, \qquad N - \frac{a}{c} = \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \cdots,$$

että

$$\frac{a}{1 \cdot 2c} + \frac{a}{2 \cdot 3c} + \frac{a}{3 \cdot 4c} + \cdots = \frac{a}{c}.$$

Johtopäätös on oikea.

Jakob Bernoullin pitkään ansiolistaan kuuluvat vielä napakoordinaattien käyttöönotto ja ns. *Bernoullin differentiaaliyhtälön* $y' + p(x)y = q(x)y^n$ esittäminen ja ratkaisu. Ratkaisu tosin onnistui samaan aikaan myös Leibnizille ja Johann-veljelle. Jakob Bernoulli kirjoitti myös ensimmäisen varsinaisen todennäköisyyslaskentaa käsittelevän monografian *Ars conjectandi*. Sen julkaisi Jakobin veljenpoika *Nicolaus (I) Bernoulli* (1687–1759) vasta Jakobin kuoleman jälkeen vuonna 1713. (Huygens oli kyllä julkaissut vuonna 1657 todennäköisyyslaskennasta vihkosen *De ratiociniis in ludo aleae*.) Bernoullin teos sisältää kombinatoriikan alkeiden systemaattisen esityksen, induktiotodistuksen binomikaavalle, ns. *Bernoullin lukujen* B_k (jotka esiintyvät mm. peräkkäisten kokonaislukujen parillisten potenssien summan lausekkeessa) määrittelyn ja todennäköisyyslaskennan *suurten lukujen lain*. – Käyrän kaarevuuden määrittävän lausekkeen keksivät veljekset kumpikin tahollaan.

Johann Bernoulli oli monesti vanhemman veljensä kilpailija ja kiistakumppani ja lopulta myös tämän seuraaja professorina Baselissa. Johann toimi jonkin aikaa yhteistyössä ranskalaisen markiisin *Guillaume l'Hôpitalin* (1661–1704; nimi esiintyy usein muodossa l'Hospital) kanssa: Bernoulli, yksi noin neljästä tuolloin maailmassa differentiaali- ja integraalilaskentaa osanneista, opetti markiisille uutta analyysiä ja lupasi, palkkiota vastaan, antaa tämän käyttöön tekemänsä uudet matemaattiset keksinnöt. Näihin kuului mm. *l'Hôspitalin sääntönä* tunnettu havainto

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)},$$

jos $f(a)=g(a)=0$. Itse asiassa l'Hôspital ja Johann Bernoulli eivät puhu raja-arvosta, vaan $\frac{0}{0}$-tyyppisen lausekkeen arvosta. Sääntöön Johann Bernoulli päätyi etsiessään ratkaisua l'Hôpitalin esittämään ongelmaan, joka koski lausekkeen

$$\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$$

arvoa, kun $x=a$. Säännön ja muut Bernoullilta oppimansa asiat markiisi julkaisi 1696 teoksessa *Analyse des infiniment petits*, joka siten on ensimmäinen differentiaalilaskennan oppikirja. Teoksen merkitys koko seuraavana vuosisatana oli suuri, vaikka monet sen premissit (kuten että äärettömän vähän toisistaan eroavat suureet ovat samoja tai että käyrät koostuvat äärettömän lyhyistä janoista) eivät nykyään vakuutakaan. Johann Bernoullin omallakin nimellä julkaistu tuotanto on laaja: se käsittää mm. variaatiolaskentaa, differentiaaligeometriaa, ensimmäisen havainnon trigonometristen funktioiden ja eksponenttifunktion yhteydestä ja nykyisen funktion merkitsemistavan ennakoinnin (Bernoulli merkitsi x:n funktiota symbolilla ϕx).

Johann Bernoulli oli Leibnizin aggressiivisimpia puolustajia differentiaali- ja integraalilaskennan prioriteettikiistassa. Hänen poikansa *Daniel Bernoulli* (1700–82) oli erittäin monipuolinen matemaatikko ja luonnontieteilijä. Matemaatikkona hänet tunnetaan ennen muuta yhtenä osittaisdifferentiaaliyhtälöiden tutkimuksen alullepanijoista. Daniel Bernoullilta on peräisin aiemmin esitetty Fibonaccin lukujen lauseke. Jakobin ja Johannin veljenpoika *Nicolaus Bernoulli* (1687–1759) oli ensimmäinen, joka käsitteli kahden muuttujan funktion kokonaisdifferentiaalia $df=p\,dx+q\,dy$.

9.2 Britannian matematiikkaa 1700-luvulla

Vaikka Newtonin ja hänen perintönsä dominoiva vaikutus kahlitsikin matematiikan kehitystä Englannissa, ei 1700-luku kuitenkaan muodosta matemaattista tyhjiötä Brittein saarilla. Merkittäviä brittimatemaatikkoja 1700-luvun alkupuolella olivat ranskalaissyntyinen, uskonnollisen vainon takia Englantiin muuttanut ja suurimman osan elämäänsä köyhyydessä viettänyt *Abraham de Moivre* (1667–1754) ja skotlantilainen *Colin Maclaurin* (1698–1746).

De Moivre kuuluu todennäköisyyslaskennan uranuurtajiin: hänen tuotannossaan esiintyy ensi kerran virhefunktio e^{-x^2} ja sen yhteys binomijakaumaan, ja hänen teoksensa *Doct-*

rine of Chances (1718) on Jakob Bernoullin *Ars conjectandin* ohella ensimmäinen todennäköisyyslaskennan systemaattinen esitys. De Moivre käytti edeltäjiään luontevammin kompleksilukuja. Kaava

$$(\cos x + i\ \sin x)^n = \cos nx + i\ \sin nx,$$

de Moivren kaava, ei esiinny eksplisiittisesti de Moivrella, mutta kylläkin lähes ekvivalentissa muodossa: de Moivre merkitsi $l = \cos nB$, $x = \cos B$ ja johti kaavan

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{l + \sqrt{l^2 - 1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l + \sqrt{l^2 - 1}}}.$$

Sen sijaan de Moivren aikalaisen ja Newtonin kolmannen asteen käyriä koskeneiden tutkimusten täydentäjän *James Stirlingin* (1692–1770) mukaan *Stirlingin kaavana* tunnettu approksimaatio

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

on itse asiassa de Moivren keksintöä, tämän työkalu binomijakauman kertoimien tarkastelussa. De Moivre on myös *vakuutusmatematiikan* pioneereja.

Maclaurinin nimi tunnetaan nykyisin *Maclaurinin sarjasta*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots$$

Itse asiassa sarjan oli julkaissut englantilainen *Brook Taylor* (1685–1731) aikaisemmin yleisemmässä, *Taylorin sarjan* muodossa jo 1715, ja jo skotlantilainen *James Gregory* (1638–75) oli käyttänyt sitä erikoistapauksissa. Myös Newton ja Johann Bernoulli olivat tunteneet sarjan. – Taylorin, Maclaurinin ja Newtonin formulaatioissa f:n derivaattojen paikalla on vastaavia fluksioiden osamääriä.

Maclaurinin todelliset ansiot ovat korkeamman asteen käyrien tutkimuksessa (jonka oli pannut alulle Newton) ja siitä, että hän kirjoitti yhden ensimmäisistä Newtonin differentiaali- ja integraalilaskentaa esittelevistä oppikirjoista, teoksen *Treatise of Fluxions* (1742). Kirjassaan Maclaurin pyrki esittämään analyysiä ”antiikin täsmällisyydellä”. Maclaurin puolusti Newtonia Englannissa virinneessä polemiikissa, joka koski uuden analyysin perusteiden pitävyyttä. Vastapuolta edusti tunnettu filosofi, irlantilainen piispa *George Berkeley* (1685–1753), joka asetti – aiheellisesti – kyseenalaisiksi tarpeen mukaan nolliksi tai nollasta poikkeaviksi käsitetyt äärettömän pienet suureet (*”ghosts of departed quantities”*) ja otaksui analyysin antamien oikeiden tulosten johtuvan sattumasta ja toisensa kumoavista virheistä. Yhtä lailla kriittinen Berkley oli leibnizilaista analyysiä kohtaan. Berkeleyn käsityksen mukaan matematiikan totuudet eivät olleet ainakaan yhtään vankemmin perusteltuja kuin uskonnon.

Maclaurin kirjoitti myös suositun, postuumina ilmestyneen, mutta kuuteen painokseen yltäneen algebran oppikirjan *Treatise of Algebra* (1748), jossa ensi kerran esiintyy kahden ja kolmen tuntemattoman lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisukaava, *Cramerin sääntö*;

nimensä tämä sääntö sai sveitsiläisestä *Gabriel Cramerista* (1704–52), joka käytti yhtälöissään indeksoituja kertoimia ja sai säännön säännöllisyyden siten paremmin näkyviin vuonna 1750 ilmestyneessä tutkielmassaan. – Ensimmäiset viitteet näin alkunsa saaneeseen *determinanttien* teoriaan löytyvät kuitenkin jo Leibnizilta vuodelta 1693.

Maclaurinin pitäytymisen klassisiin menetelmiin on katsottu haitanneen matematiikan kehitystä Englannissa. – Maclaurin sairastui kuolettavasti osallistuessaan Englannin hallituksen puolella 1745 Edinburghin puolustukseen kapinoivia skotteja vastaan.

Toinen nimensä historiaan jättänyt englantilainen oppikirjantekijä oli Woolwichin Kuninkaallisen Sotilasakatemian professori *Thomas Simpson* (1710–61). Hänen oppikirjansa *A New Treatise of Fluxions* (1737) ilmestyi Simpsonin yksityisoppilaiden tilaamana. Simpsonin nimissä kulkevan approksimatiivisen integroinnin kaavan oli keksinyt jo aikaisemmin mm. Stirling.

9.3 Euler

Yksi kaikkien aikojen merkittävimpiä matemaatikkoja on *Leonhard Euler* (1707–83). Hän oli Bernoullien tapaan kotoisin Baselista Sveitsistä ja Johann Bernoullin oppilas. Euler, kuten useat muutkin 1700-luvun merkittävät matemaatikot, teki elämäntyönsä tiedeakatemioissa, joita hallitsijat perustivat eri maiden hovien yhteyteen. Euler toimi pisimpään Pietarissa Pietari Suuren aloitteesta perustetussa tiedeakatemiassa. Akatemia oli perustettu vuonna 1724 ja sen ensimmäinen matemaatikko oli preussilaissyntyinen *Christian Goldbach* (1690–1764), yha ratkaisematta olevasta *Goldbachin konjektuurista* (jokainen parillinen luku on kahden alkuluvun summa) tunnettu. Pietariin nuoren Eulerin houkuttelivat sinne jo aikaisemmin Goldbachin vaikutuksesta asettuneet Johann Bernoullin pojat Daniel ja nuorena kuollut *Nicolaus Bernoulli* (1695–1726). Myös Berliinissä Fredrik Suuren perustamassa vastaavanlaisessa akatemiassa Euler vietti pitkähkön ajanjakson, ennen kuin Katariina Suuri kutsui hänet takaisin Pietariin. Euler on haudattu Pietariin, Aleksanteri Nevskin luostarin hautausmaalle.

Eulerin tuotteliaisuus on lähes käsittämätön. Vaikka hän menetti näön toisesta silmästään alle 30-vuotiaana ja sokeutui kokonaan 17 vuotta ennen kuolemaansa, hän kirjoitti ja saneli jatkuvasti matematiikkaa, keskimäärin 800 sivua vuodessa. Elinaikanaan Euler julkaisi yli 500 tutkimusta, ja julkaistavaa riitti vielä 40 vuodeksi Eulerin kuoleman jälkeen; kaikkiaan Eulerin julkaisujen määräksi on laskettu 856. Eulerin ensimmäinen tieteellinen julkaisu ilmestyi, kun hän oli 19-vuotias. Se käsitteli (Sveitsissä epärelevantilta vaikuttavaa) kysymystä laivan mastoista. Eulerin koottujen teosten julkaiseminen on yhä kesken. Ne tulevat lopulta käsittämään 72 vankkaa osaa; tähän ei vielä kuulu usean tuhannen kirjeen laajuinen kirjeenvaihto eivätkä aiemmin julkaisemattomat käsikirjoitukset ja päiväkirjat. Eulerin mukaan nimettyjä käsitteitä ja lauseita löytyy matematiikasta ja fysiikasta kymmenittäin. – Eulerilla oli 13 lasta.

Eulerin kirjoitukset käsittelevät jokseenkin kaikkia silloisen matematiikan ja fysiikan aloja, ja paitsi tieteellisiä tutkimuksia niihin kuuluu oppikirjoja ja yleistajuisia esityksiä. Tieteellisen popularisoinnin esikuvia on Eulerin *Kirjeitä eräälle saksalaiselle prinsessalle* (1760–61). Euler on luonut suuren osan vakiintunutta matematiikan merkintäkoneistoa: mm. luonnollisen logaritmijärjestelmän kantaluvun merkintä e (Euler todisti, että e on irrationaalinen ja tarkasteli ensimmäisenä logaritmeja eksponentteina), ympyrän kehän ja halkaisijan suhde π, imaginaariyksikkö $i = \sqrt{-1}$, funktiomerkintä $f(x)$ (vuodelta 1734), kolmion sivujen ja kulmien standardimerkinnät a, b, c; A, B, C, summamerkki $\sum$, binomikertoimen merkintä $\binom{p}{q}$ (itse asiassa Euler kirjoitti $\left[\frac{p}{q}\right]$) kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden säteiden standardimerkinnät r, R ovat kaikki Eulerin käyttöönottamia ja vakiinnuttamia, vaikka π-merkintää olikin jo ehtinyt aikaisemmin käyttää muuan englantilainen *William Jones* (1675–1749).

Paitsi puhtaasti merkintöjen alalla Eulerin lukuisat oppikirjat, kuten *Introductio in analysin infinitorum* (1748), *Institutiones calculi differentialis* (1755) ja *Institutiones calculi integralis* (1768–74) ja saksankielinen *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1770) loivat monin osin yhä vallitsevan korkeamman matematiikan yliopisto-opetuksen standardin. *Introductio* kokosi uuden analyysin peruskäsitteet funktiokäsitteen ympärille. Eulerille ei funktio kuitenkaan vielä ollut aivan lopullisesti täsmentynyt, vaan hän määritteli sen milloin muuttujista ja vakioista mielivaltaisesti kootuksi lausekkeeksi, milloin koordinaatistoon piirretyn mielivaltaisen ("vapaalla kädellä piirretyn") käyrän havainnollistamaksi riippuvuudeksi. – Kaikki Eulerin päättelyt eivät olleet korrekteja: geometrisen sarjan summakaavasta Euler päätteli suoraviivaisesti, että

$$\ldots x^{-2} + x^{-1} + 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} + \frac{1}{1-x} = 0\,!$$

Useimmissa tapauksissa Eulerin intuitio johti kuitenkin hänet oikeaan tulokseen, vaikka päättelyaskelet olisivatkin olleet vajavaisia.

Eulerin tärkein työkalu olivat joka tapauksessa sarjat. Esimerkiksi yhtälön

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \ldots = 0$$

ratkaisuja ovat $x_1 = \pi^2$, $x_2 = (2\pi)^2$, ... Mutta algebrallisen yhtälön $1 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$ juurille x_1, x_2, ..., x_n pätee

$$1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x}{x_n}\right)$$

ja

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = -a_1.$$

Jos tämän oletettaisiin pätevän myös "ääretönasteisiin" polynomeihin, saataisiin

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \ldots = -\left(-\frac{1}{3!}\right),$$

joten

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Saatuaan tietää Eulerin tuloksen Johann Bernoulli toivoi veljensä olevan vielä elossa – Jakob Bernoulli oli omistanut paljon tarmoa epäonnistuneisiin yrityksiinsä laskea kokonaislukujen neliöiden käänteislukujen summaa. Samanlaisin päättelyin Euler johti sittemmin Riemannin ζ-funktiona tunnetuksi tulleen sarjan

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

arvon parillisilla kokonaisluvuilla s. Arvolla $s = 1$ $\zeta(s)$ on hajaantuva harmoninen sarja. Euler todisti, että sarjan n:nnen osasumman ja luvun $\ln n$ erotus lähenee raja-arvoa $\gamma \approx 0{,}577218$; tätä lukua sanotaan *Eulerin vakioksi*. Euler keksi mm. yhteyden

$$\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

missä tulo ulotetaan kaikkiin alkulukuihin p.

Esimerkkinä Eulerin päättelystä tarkastellaan vielä eksponenttifunktion perusominaisuuksien johtoa. Jos ϵ on "äärettömän pieni luku", niin $a^\epsilon = 1 + k\epsilon$, missä k on a:sta riippuva vakio. Jos nyt x on äärellinen luku, niin $N = \dfrac{x}{\epsilon}$ on "äärettömän suuri luku". Silloin

$$\begin{aligned} a^x = a^{N\epsilon} = (1 + k\epsilon)^N &= \left(1 + \frac{kx}{N}\right)^N \\ = 1 + N\left(\frac{kx}{N}\right) + \frac{N(N-1)}{2!}\left(\frac{kx}{N}\right)^2 &+ \frac{N(N-1)(N-2)}{3!}\left(\frac{kx}{N}\right)^3 + \cdots \\ = 1 + kx + \frac{1}{2!}\frac{N(N-1)}{N^2}k^2x^2 &+ \frac{1}{3!}\frac{N(N-1)(N-2)}{N^3}k^3x^3 + \ldots . \end{aligned}$$

Koska N on äärettömän suuri, on

$$\frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{N} = \ldots = 1,$$

joten

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \ldots .$$

Kun tässä asetetaan $x = 1$, saadaan

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \ldots .$$

Merkitään nyt e:llä arvoa $k = 1$ vastaavaa a:ta. Silloin

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots .$$

Aikaisemman nojalla on edelleen $e^x = \left(1 + \dfrac{x}{N}\right)^N$.

Euler operoi kompleksiluvuilla vapaasti. *Eulerin kaava*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

(jonka keksijänä voinee pitää de Moivrea) oli hänelle keskeinen käsite mm. logaritmifunktion ominaisuuksien selvittelyssä: Euler selvitti matemaatikkoja pitkään askarruttaneen kysymyksen negatiivisten lukujen logaritmeista ja totesi logaritmifunktion monikäsitteisyyden. Euler on usean muuttujan analyysin pioneereja. Kaksinkertaisen integraalin muuttujanvaihtokaava ja integraalin palauttaminen yksiulotteisiksi integroinneiksi on hänen esittämänsä.

Euler pani alulle *elliptisten integraalien* tutkimuksen, jonka merkitys matematiikan myöhemmissä vaiheissa osoittautui suureksi. Elliptisiin integraaleihin, integraaleihin, joiden integroitavassa esiintyy ainakin kolmatta astetta olevan polynomin neliöjuuria, johtavia ongelmia olivat esittäneet jo ennen vuotta 1700 mm. Bernoullit. Tällaisia olivat elastisen sauvan muoto, heilurin heilahdusaika, lemniskaatta-käyrän $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ kaaren pituus ja ennen muuta tähtitieteessä mielenkiintoinen ellipsin kaaren pituus. Viimeksi mainittua oli selvitellyt italialainen kreivi *Carlo de'Toschi Fagnano* (1682–1766), mutta Euler kehitti ensimmäisen merkittävän elliptisten integraalien yhteenlaskukaavan:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^c \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

jos

$$x = \frac{y\sqrt{1-c^4} \pm c\sqrt{1-y^4}}{1+c^2y^2}.$$

Eulerin vaikutus näkyy myös mm. tavallisissa differentiaaliyhtälöissä ja variaatiolaskennassa. Differentiaaliyhtälöiden teorian vakiintunut asioiden esittämisen järjestys ja monet tekniikat, kuten integroivien tekijöiden käyttö ja vakiokertoimisten lineaaristen yhtälöiden ratkaisukaavat periytyvät häneltä. Variaatiolaskennan keskeinen integraalin

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

maksimoivan funktion $y = y(x)$ välttämätön ehto

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

on sekin nimeltään *Eulerin yhtälö*.

Eulerin töillä oli suuri merkitys analyysin lisäksi jokseenkin kaikilla muillakin matematiikan alueilla. Euler kehitti huomattavasti lukuteoriaa: hän osoitti Fermat'n olettamuksen kaikkien lukujen $2^{2^n} + 1$ eli Fermat'n lukujen jaottomuudesta vääräksi, julkaisi ensimmäisen todistuksen ns. Fermat'n pienelle lauseelle, jota hän myös yleisti sittemmin *Eulerin funktioksi* nimetyn (nimitys on Gaussin) lukuteoreettisen funktion ϕ avulla ($\phi(n) = n$:ää pienempien sellaisten kokonaislukujen määrä, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä n:n kanssa), osoitti alkulukujen käänteisluvuista muodostuvan sarjan hajaantuvaksi, todisti Fermat'n suuren lauseen hypoteesin todeksi eksponentilla $n = 3$, osoitti, että parilliset täydelliset luvut ovat välttämättä Eukleideen ilmoittamaa muotoa jne. Geometriaan Euler jätti mm. kolmion merkillisiä pisteitä yhdistävän *Eulerin suoran* ja yhdesti yhtenäisen monitahokkaan kärkien, särmien ja sivutahkojen määriä v, e ja s sitovan *Eulerin kaavan* $v-e+s = 2$. Myös toisen asteen pintojen, kartioleikkausten kolmiulotteisen analogian, ominaisuuksien selvittely kuuluu Eulerin ansioluetteloon.

Yksi Eulerin kuuluisimpia töitä on ns. *Königsbergin siltaongelman* ratkaisu vuodelta 1736. Tehtävää – on konstruoitava kävelyreitti, joka ylittäisi Itä-Preussin Königsbergissä (nykyisin paremmin tunnettu Kaliningradina) olevat Pregel-joen seitsemän siltaa, kunkin vain kerran – ja sen ratkaisua, jossa tällainen reitti osoitetaan mahdottomaksi, voi luonnehtia lähinnä ajanvietematematiikaksi, mutta toisaalta katsotaan, että Eulerin ratkaisu on antanut alkusysäyksen kahdelle sittemmin merkittävälle matematiikan alalle, topologialle ja verkkoteorialle. *Eulerin polku* on sellainen verkon sivuista koostuva tie, jossa kukin sivu esiintyy tasan yhden kerran.

9.4 Ranskan ja Italian valistusajan matemaatikkoja

Italialainen *Maria Gaetana Agnesi* (1718–99) opetti matematiikkaa pikkuveljilleen. (Maria oli vanhin kaikkiaan 21 sisaruksesta.) Hän julkaisi oppimateriaalinsa vuonna 1748 nimellä *Instituzioni analitiche ad uso della gioventu italiana*. Tämän sinänsä pätevän oppikirjan ohella Agnesinkin nimi on jäänyt historiaan väärinkäsityksen kautta. Agnesin esimerkkinään käsittelemä kaarevuussuuntansa vaihtava käyrä

$$y = \frac{a\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$$

oli jo aikaisemmin tunnettu nimellä *la versiera*, 'kääntyilevä'. Kirjaa englanniksi käännettäessä kääntäjä sekoitti nimityksen sanaan *avversiera*, 'paholaisen vaimo'. Käyrä on sittemmin tullut tunnetuksi *Agnesin noitana*.

Huomattavimmat 1700-luvun puolivälin ranskalaismatemaatikot olivat *Alexis Claude Clairaut* (1713–65) ja *Jean le Rond d'Alembert* (1717–83). Edellinen – eräs kaikkien aikojen varhaiskypsimpiä matemaatikkoja – luki kymmenvuotiaana l'Hôspitalia ja julkaisi teini-ikäisenä merkittävän kolmiulotteista analyyttistä geometriaa käsittelevän teoksen. Clairaut valittiin erivapaudella jo 18-vuotiaana Ranskan tiedeakatemian jäseneksi. – Clairaut on käynyt Suomessakin kuuluisan, maapallon muotoa Tornionjokilaaksossa selvitelleen *Maupertuis'n meridiaaninmittausretkikunnan* mukana. Hänen myöhempi maapallon muotoa käsittelevä teoksensa sisältää differentiaaliyhtälöiden teoriaa kehittäneitä tuloksia, mm. differentiaalin $Mdx + Ndy$ eksaktisuusehdon

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Löytölapsi (etunimi Jean le Rond viittaa samannimiseen pariisilaiskirkkoon, jonka portaille korkeasukuinen mutta kevyttapainen äiti oli pojan hylännyt. Aatelinen isä kustansi sittemmin pojan elatuksen ja koulutuksen. Notre Damen kirkon kyljessä sijainnut *Saint-Jean-le-Rond* on purettu.) d'Alembert oli monipuolinen tiedemies ja filosofi, alkuperäiseltä koulutukseltaan juristi. Lakitieteen opinnot suoritettuaan d'Alembert aikoi vielä opiskella lääkäriksi. Koska matematiikan harrastus oli haitaksi opinnoille, d'Alembert talletti matemaattiset kirjansa erään ystävänsä luokse. Vähin erin hän kuitenkin haki ne takaisin, jätti lääketieteen ja rupesi ammatikseen matemaatikoksi ja filosofiksi. d'Alembertin pitkäaikainen toimi oli Ranskan Tiedeakamian pysyvän sihteerin tehtävä; hän oli aikansa merkittävimpiä tiedepoliittisia vaikuttajia. Fredrik Suuri kutsui Eulerin akatemiaansa d'Alembertin neuvosta, samoin myöhemmin Lagrangen.

D'Alembert oli keskeisessä asemassa valistusfilosofien suurteoksen, *Denis Diderot'n* (1713–84) julkaiseman 28-osaisen *Encyclopédien* toimituksessa ja vastasi sen matematiikkaa ja luonnontieteitä käsittelevistä artikkeleista. Ensyklopedia-artikkelissa d'Alembert mm. esitti modernin käsityksensä infinitesimaalilaskennan perustamisesta täsmälliselle raja-arvon käsitteelle: d'Alembert ymmärsi nykyaikaiseen tapaan raja-arvon suureeksi, jota muuttuva suure lähestyy niin, että suureen ja raja-arvon erotus tulee pienemmäksi kuin mikä hyvänsä ennalta annettu suure. D'Alembert pyrki löytämään todistuksen *algebran peruslauseelle* (jonka mukaan jokaisella polynomilla on ainakin yksi kompleksinen nollakohta); ranskalaisella kielialueella tämä keskeinen teoreema tunnetaan *d'Alembertin lauseena*. Sen todistus onnistui paremmin Gaussille.

D'Alembert on Eulerin ja Daniel Bernoullin ohella *osittaisdifferentiaaliyhtälöiden* tutkimuksen aloittajia: hän tutki mm. värähtelevän kielen liikettä (ongelma, joka on synnyttänyt poikkeuksellisen paljon matemaattista teoriaa ja joka oli monen kiistan aiheena 1700-luvun johtavien matemaatikkojen kesken), ja johtui osittaisdifferentiaaliyhtälöön

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Tälle *värähtely-yhtälölle* d'Alembert löysi ratkaisun $u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$; tässä f ja g ovat mielivaltaisia funktioita.

Etienne Bezout (1730–83) antoi huomattavan panoksen jo Leibnizin alkuun panemalle determinanttien teorialle. Hänen havaintonsa on mm. se, että lineaarisen homogeenisen yhtälöryhmän determinantin häviäminen on edellytys ryhmän ei-triviaalien ratkaisujen olemassaololle. Bezout kehitti yhtälöiden resultanttiteoriaa, ehtoja, joiden vallitessa kahdella polynomiyhtälöllä on yhteinen juuri. Bezout'n metodin avulla oli mahdollista selvittää kysymys kahden algebrallisen käyrän leikkauspisteiden lukumäärästä.

9.5 Lagrange

1700-luvun jälkipuoliskon merkittävin ranskalaismatemaatikko on *Joseph Louis Lagrange* (1736–1813), Eulerin ohessa koko vuosisadan suurimpia. Puoliksi italialainen Lagrange syntyi ja opiskeli Torinossa, jonka tykistöakatemian matematiikan professoriksi hänet nimitettiin jo 19-vuotiaana. Samoin kuin Eulerin, Lagrangenkin työnantajina olivat hallitsijat. Fredrik Suuri kutsui hänet Eulerin seuraajaksi Berliinin tiedeakatemiaan, jossa hän vaikutti 20 vuotta, ja 1787 Ludvig XVI kutsui hänet Ranskaan akateemikon tehtäviin. Lopun elämäänsä Lagrange toimi Pariisissa. Lagrange kärsi masennuksesta, erityisesti Ranskaan muutettuaan.

Lagrangen tutkimusote oli kriittisempi kuin useimpien hänen aikansa matemaatikkojen. Analyysin loogisten perusteiden aukkoja Lagrange pyrki paikkaamaan suuressa teoksessaan *Théorie des fonctions analytiques* (1797) sarjakehitelmien avulla: jos funktion f Taylorin sarja

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

tunnetaan, f:n derivaatat voidaan ilmaista kertoimien avulla: $f'(x_0) = a_1$, $f''(x_0) = 2a_2$ jne. Lagrange teki näistä relaatioista derivaattojen määritelmän, uskoen päässeensä eroon infinitesimaalisista suureista. Itse asiassa sana *derivaatta* (jolle aikanaan on suomen kieleen tarjottu sananmukaista käännöstä 'johdos') tuli ensi kertaa käyttöön vasta tässä yhteydessä. Valitettavasti määritelmä toimii vain suppenevan Taylorin sarjan omaavien funktioiden yhteydessä. Tunnettu vastaesimerkki $f(x) = e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, osoittaa, että origon ulkopuolella nollasta eroavan funktion kaikki derivaatat origossa voivat hävitä, jolloin funktion sarjakehitelmä on nollafunktion kehitelmä. Lagrangekaan ei aina ottanut huomioon suppenemisongelmia, joiden mukana välttämättä seuraa kysymys raja-arvosta. – Usein käytettävät derivaattojen merkinnät $f'(x)$, $f''(x)$ jne. ovat peräisin Lagrangelta, samoin ensimmäinen lauseke Taylorin sarjan jäännöstermille:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n, \qquad R_n = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

missä ξ on x:n ja x_0:n välissä. Myös integroinnin pallokoordinaateissa mahdollistava transformaatio $dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$ on Lagrangen.

Lagrangen tutkimukset käsittelivät mekaniikkaa (*Lagrangen funktio* ja liikeyhtälöt; monumentaaliteos *Mécanique analytique* (1788), mekaniikan aksiomaattinen esitys "ilman yhtäkään kuvaa") ja differentiaaliyhtälöitä (ns. epähomogeenisten lineaaristen yhtälöiden ratkaiseminen *parametrien variointimenetelmällä* on hänen keksintöään), variaatiolaskentaa (termi variaatiolaskenta johtuu Lagrangen varhaisimmissa julkaisuissaan käyttämistä sanoista variaatiomenetelmä, josta Euler muokkasi nykyisin käytössä olevan sanan), yhtälöiden numeerista ratkaisemista, lukuteoriaa (mm. todistus Fermat'n väittämälle, että jokainen kokonaisluku voidaan esittää enintään neljän neliön summana, Pellin yhtälön yleinen ratkaisu, yleisen toisen asteen Diofantoksen yhtälön ratkaisu) ja algebraa. Viimeksi mainitulla alalla Lagrange kuuluu ryhmäkäsitteen ennakoijiin. Hän tutki algebrallisen yhtälön ratkeavuuden ja sen juurien permutaatio-ominaisuuksien yhteyksiä ja johtui mm. keskeiseen teoreemaan, jonka mukaan (nykyisin käsittein) äärellisen ryhmän aliryhmän kertaluku on ryhmän kertaluvun tekijä. Tämä tulos tunnetaan nimellä *Lagrangen lause*. Lagrange päätyi otaksumaan, että korkeampaa kuin neljättä astetta olevilla polynomiyhtälöillä ei ilmeisesti ole algebrallista ratkaisua. Usean muuttujan sidotun ääriarvon määrittäminen apumuuttujien, *Lagrangen kertoimien*, avulla on hänen keksintöään.

Ranskan vallankumouksen aikana Lagrange toimi puheenjohtajana komiteassa, joka suunnitteli metrijärjestelmän. Lagrange ajoi läpi suhdeluvun 10, vaikka luvulla 12 oli paljon kannatusta. Sana *metre* oli Laplacen ehdottama.

10 Matematiikka Ranskan vallankumouksen aikoihin

1700- ja 1800-lukujen taite oli etenkin Ranskassa matemaattisesti aktiivista aikaa. Lagrangenkin toiminta ajoittuu vielä osaksi Ranskan vallankumouksen aikaan, ja toisaalta useat seuraavassa käsiteltävät matemaatikot aloittivat työnsä jo ennen vallankumousta. Monesti kaikkien aikojen suurimmaksi matemaatikoksi arvostetun Gaussin matemaattinen ura alkoi Ranskan vallankumouksen vuosina, vaikkei Gauss muuten ajan poliittisiin mullistuksiin liitykään. Aikakauden keskeinen poliittinen ja sotilaallinen hahmo *Napoleon Bonaparte* (1769–1821) lienee ainoa matematiikan historiaan nimensä jättänyt hallitsija: *Napoleonin lause* sanoo, että sellainen kolmio, jonka kärjet ovat mielivaltaisen kolmion sivut kantoima piirrettyjen tasasivuisen kolmioiden painopisteet, on tasasivuinen. Vanha Tietosanakirja kertoo Napoleonista: "Koulussa hän osoitti suurta taipumusta matematiikkaan, harrasti myöskin historiaa ja maantiedettä, mutta osoittautui heikoksi kielissä."

10.1 Monge ja École Polytechnique

Enimmältään itse oppinsa hankkinut *Gaspard Monge* (1746–1818) tunnetaan matematiikassa ennen muuta analyyttisen geometrian ja differentiaaligeometrian kehittäjänä ja *deskriptiivisen geometrian* keksijänä. Tämän erityisesti tekniikan kehitykselle tärkeän matematiikan alan Monge keksi nuorena toimiessaan sotilasoppilaitoksen piirtäjänä – linnoituslaitteiden piirustamisessa pitkät numerolaskut korvannut deskriptiivinen geometria olikin aluksi tarkkaan varjeltu ranskalainen tai oikeastaan nimenomaan Mézièresin pioneeriakatemian sotasalaisuus. Monge julkaisi metodinsa, jonka perusajatus on kolmiulotteisen kappaleen kuvaaminen sen kahdelle toisiaan vastaan kohtisuoralle tasolle synnytettyjen projektioiden avulla, vasta vuonna 1800. Ranskan vallankumoukseen Monge otti innokkaasti osaa ja joutui samalla moniin keskeisiin tehtäviin, mm. laivastoministeriksi. Ns. direktoriohallituksen aikana vuonna 1794 perustettiin, paljolti Mongen ansiosta, Pariisiin teknillinen korkeakoulu *École Polytechnique*, jossa Monge sittemmin toimi opettajana ja huomattavan geometrisen koulukunnan perustajana. École Polytechnique on vanhin teknillinen korkeakoulu. Berliiniin sellainen perustettiin 1799, Prahaan 1806 jne. Varsinkin École Polytechniquen merkitys matematiikan kehitykselle on suuri. Sen matematiikan opetuksen taso oli korkein mahdollinen ja sen käyttöön kirjoitetut oppikirjat olivat merkittäviä uuden matemaattisen tiedon levittäjiä. Matematiikan merkitys tekniikalle alkoi muuttaa matematiikan asemaa kulttuurissa – siitä alkoi tulla hyödyllistä tiedettä.

Mongen deskriptiivinen geometria oli synteettinen menetelmä. Mongen ansiot analyyttisen geometrian alalla olivat myös merkittävät. Häneltä ovat olennaisesti peräisin mm. suoran yhtälöt kolmiulotteisessa avaruudessa. Mongea pidetään myös yhtenä differentiaaligeometrian perustajista.

Polyteknillinen koulu viitoitti tekniikan kehityksen myötä tarpeelliseksi tulleen korkeamman teknisen opetuksen suuntaviivoja. Koulun matemaattinen taso ja vaatimustaso olivat korkeat. Se muodostui Ranskan ehdottomaksi matemaattiseksi keskukseksi. Sen ensimmäisiä opettajia olivat Mongen ohella mm. Lagrange, Laplace ja Legendre. École Polytechniquen rinnalle perustettiin pian opettajankoulutusta varten *École Normale*, jonka opettajakuntaan on myös kuulunut joukko Ranskan merkittävimpiä matemaatikkoja (ikivanhan Sorbonnen, Pariisin yliopiston, merkitys matematiikan kannalta oli 1700- ja 1800-luvuilla vähäinen). École Polytechniquen ja École Normalen oppikirjoiksi kirjoitetut teokset olivat 1800-luvun matematiikan oppikirjojen ehdotonta huippua.

10.2 Fourier

Mongen ystäviä ja työtovereita niin École Polytechniquessa kuin Napoleonin Egyptinsotaretkelläkin oli *Joseph Fourier* (1768–1830) (Monge oli Napoleonin perustaman Egyptin instituutin johtaja ja Fourier sen sihteeri; Fourier julkaisi retken aikana kootun tieteellisen materiaalin). Upseerin uraa havitellut Fourier joutui muuttamaan suunnitelmiaan alhaisen syntyperänsä vuoksi ja kouluttautui papiksi. Sittemmin hän pääsi kuitenkin matematiikan opettajaksi upseerikouluun.

Fourier teki vallankumouksellisen ja paljon vastustustakin herättäneen huomion: jokainen funktio f, ei välttämättä edes jatkuva, voidaan esittää trigonometrisena sarjana

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(nax)+b_n\sin(nax)).$$

Sarjaesitystä on sittemmin ruvettu kutsumaan funktion *Fourierin sarjaksi*. Fourierin pääteos *Théorie Analytique de la Chaleur* (Analyyttinen lämpöteoria, 1822), jossa trigonometrisia sarjoja käytetään osittaisdifferentiaaliyhtälöiden reuna-arvotehtävien ratkaisuun, ei ollut kaikin puolin loogisesti moitteeton; sen epätäsmällisyydet olivat yksi keskeisiä 1800-luvulla läpiviedyn analyysin täsmällistyttämisohjelman alkusyitä.

Fourierin sarjakehitelmän lähtökohtana oli stabiilin lämpötilajakauman etsiminen alueessa $\{(x, y) \mid 0 < x < \pi,\, 0 < y\}$. Fysikaalisten syiden perusteella jakauma tottelee Laplacen yhtälöä

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

ja reunaehtoja $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$, $u(x, 0) = \phi(x)$. Jos ratkaisua etsitään muodossa $u(x, y) = f(x)g(y)$, saadaan muotoa $u(x, y) = e^{-ny}\sin(nx)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, olevia yksittäisratkaisuja ja niiden superpositiona yleisempi ratkaisu $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ny}\sin(nx)$, missä b_n:t ovat vakioita. Jos vakiot voidaan määrittää niin, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)=\phi(x),$$

ratkaisu on valmis. Fourier päätyi jokseenkin heuristisen, pitkälti ϕ:n Taylorin kehitelmään perustuvan päättelyn jälkeen siihen, että kertoimet toteuttavat toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön, joka viimein johtaa kertoimien lausekkeeseen

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(x)\sin(nx)\,dx.$$

Tämän saatuaan hän totesi samaan päädyttävän olettamalla ϕ:lle trigonometrinen kehitelmä ja käyttämällä "ortogonaalisuusehtoja"

$$\int_0^\pi \sin(kx)\sin(nx)\,dx = 0, \text{ jos } k \neq n.$$

Koska kertoimien lauseke edellyttää vain "käyrän alle jäävää pinta-alaa" ja koska ϕ:n jaksollisuus vähintäänkin tuo helposti mukanaan epäjatkuvuuskohtia, Fourierin sarja synnytti tarpeen tarkastella integrointia ja yleisemminkin analyysin prosesseja myös epäjatkuvien funktioiden maailmassa. Fourierin sarjan suppeneminen ja sen rajafunktion käyttäytyminen ei ole ongelmatonta. Näiden kysymysten selvittelystä tuli yksi merkittävimpiä analyysin kehitykseen 1800-luvulla vaikuttaneita tekijöitä.

Fourierin töissä esiintyvät myös ensimmäiset viitteet sittemmin tärkeäksi nousseen funktion f Fourierin integraalin eli Fourier- muunnoksen suuntaan.

Fourier otti käyttöön määrätyn integraalin rajojen nykyisen merkinnän $\int_a^b f(x)\,dx$. Euler oli merkinnyt $\int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x = a \\ x = b \end{bmatrix}$.

10.3 Laplace ja Legendre

Myös *Pierre Simon Laplace* (1749–1827), "Ranskan Newton", alkoi matemaattisen uransa sotakoulu *École Militairen* opettajana Pariisissa – paikan hankki Laplaceen aluksi torjuen suhtautunut d'Alembert, jonka Laplace onnistui vakuuttamaan kyvyistään jättämällä tälle laatimansa kokonaisesityksen mekaniikan perusteista. Ranskan Tiedeakatemian jäsenyyteen Laplace pääsi 24-vuotiaana.

Laplacekin osallistui vallankumouksen ja Napoleonin[1] hallinnon aikana yhteiskunnallisiin toimiin, olipa kuusi viikkoa sisäministerinäkin, joskin huonolla menestyksellä. Napoleon joutui nimittäin erottamaan ylen pikkutarkan Laplacen todettuaan, että hän "toi infinitesimaalien hengen hallintoon". Laplace sopeutui Ranskan poliittisiin vaihteluihin joustavasti.

Laplace kirjoitti kaksi suurteosta: *Théorie analytique des probabilités* (1812) ja *Mécanique céleste* (viisi osaa, 1799 – 1825). Edellinen on matemaattisen analyysin keinovaroja täydellisesti hyväksi käyttävä todennäköisyyslaskennan kokonaisesitys. Siihen sisältyy useita huomattavia keksintöjä, kuten *Laplacen muunnos*

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx,$$

jonka avulla monet differentiaali- ja integraaliyhtälöt palautuvat algebrallisiksi yhtälöiksi, ja *pienimmän neliösumman menetelmä* havaintovirheiden tasoittamiseksi. Menetelmän oli ensimmäisenä esittänyt Legendre, mutta ilman todistusta. Laplace esitti kirjansa toisen painoksen esipuheessa teesin, jonka mukaan maailman tulevaisuus on menneisyyden determinoima. Jos tietämys olisi riittävää, maailman tila minä hyvänsä tulevaisuuden hetkenä olisi matemaattisesti laskettavissa.

[1] Laplace oli hyväksynyt Napoleonin matematiikassa tämän tykistöopintojen aikana.

Laplacen monumentaalinen taivaanmekaniikan kokonaisesitys luo yleiskuvan Newtonin oppien mukaisesta aurinkokunnan fysiikasta. Teos tuo matematiikkaan ja fysiikkaan *potentiaalifunktion* (joka tosin oli ollut tuttu Lagrangellekin), *Laplacen operaattorin*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ja *Laplacen differentiaaliyhtälön* $\Delta u = 0$, jonka ratkaisut ovat potentiaalifunktioita. Laplacelle matematiikan merkitys oli aina sekundaarinen: se oli luonnontieteen, ennen kaikkea taivaanmekaniikan tutkimuksessa välttämätön, mutta vailla itseisarvoa.

Adrien Marie Legendre (1752–1833), myös alkuun École Militairen opettaja, pysytteli enimmäkseen sivussa yhteiskunnallisista tehtävistä lukuun ottamatta metrijärjestelmäprojektia, johon osallistuivat myös Lagrange, Monge ja Laplace. Kymmenjärjestelmään perustuvat mittayksiköt olivat valmiit vuonna 1799.

Legendre kirjoitti hyviä ja suosittuja oppikirjoja mm. geometriasta, lukuteoriasta ja integraalilaskennasta. Matemaattinen fysiikka saa kiittää häntä useista matemaattisista apuneuvoista, kuten monissa yhteyksissä tarpeellisista *Legendren funktioista*, jotka ovat differentiaaliyhtälön $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ ratkaisuja. Legendre systematisoi elliptisten integraalien eli tyyppiä

$$\int R(x, \sqrt{s(x)})\, dx,$$

missä R on rationaalifunktio ja s kolmannen tai neljännen asteen polynomi, olevien integraalien teoriaa. Hän osoitti, että nämä integraalit voidaan aina palauttaa yhteen muutamista ns. *Legendren normaalimuodoista*, joista tärkeimmät ovat

$$F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$$

ja

$$E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx.$$

Funktioiden E ja F arvoja on taulukoitu. Elliptisten integraalien teoria oli tärkeä tutkimuskohde 1800-luvulla; elliptisten integraalien tutkimuksen merkitys yleisen kompleksimuuttujan funktioiden teorian synnylle on suuri.

Legendren työt myös lukuteorian alalla ovat merkittäviä. Tunnettuja ovat hänen neliölukujen jakojäännöksiä koskevat tuloksensa, joiden yhteydessä syntyi *Legendren symboli* $(p|q)$, joka on $+1$ tai -1 sen mukaan, onko p jonkin neliön jakojäännös modulo pariton alkuluku q vai ei. Legendre esitti myös empiiristen havaintojen perusteella syntyneen *alkulukuhypoteesin*, jonka mukaan n:ää pienempien alkulukujen lukumäärä $\pi(n)$ lähestyy asymptoottisesti arvoa

$$\frac{n}{\log n},$$

kun n kasvaa. Tämän alkulukujen sattumanvaraiselta näyttävän jakautumisen kannalta yllättävän hypoteesin todistus onnistui vasta vuonna 1896 ranskalaiselle *Jacques Hadamardille* (1865–1963) ja belgialaiselle *Charles de la Vallée Poussinille* (1866–1962); venäläinen *Pafnuti Tšebyšev* (1821–94) oli tällä välin ehtinyt osoittaa, että raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \pi(n)\frac{\log n}{n}$$

on olemassa. – Legendre todisti Fermat'n suuren lauseen hypoteesin oikeaksi tapauksessa $n = 5$.

10.4 Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777–1855), "matemaatikkojen kuningas", syntyi työläisperheeseen Braunschweigissa lähellä Hannoveria (tasan 50 vuotta Newtonin kuoleman jälkeen, on huomautettu); vanhempien vastustuksesta huolimatta varhaiskypsä poika pääsi opintielle mm. hallitsevan herttuan tuella. Gauss epäröi klassisen filologin ja matemaatikon elämänurien välillä 18-vuotiaana, jo sitä ennen keksittyään pienimmän neliösumman menetelmän, 10 vuotta ennen Legendrea. Uranvalinta selvisi, kun Gauss keksi (29. maaliskuuta 1796), että säännöllinen 17-kulmio on konstruoitavissa harpin ja viivoittimen avulla – jo antiikin ajoista jatkunut tasogeometrian tutkimus oli siihen mennessä selvittänyt säännöllisen p-kulmion piirtämisen parittomilla p:n arvoilla vain tapauksissa $p = 3$ ja $p = 5$. (Gauss toivoi 17-kulmion koristavan hänen hautakiveään kuten Arkhimedes toivoi pallosta, lieriöstä ja kartiosta. Gaussin muistopatsaassa Braunschweigissa on kuitenkin 17-sakarainen tähti, koska taiteilija arveli 17-kulmion sekoittuvan ympyrään.)

Newtonin tapaan Gaussinkin periaate oli julkaista tutkimustuloksiaan säästeliäästi: hänen sinetissäänkin on tunnuslause *Pauca sed matura*, 'vähän mutta kypsää'. Gaussin jälkeensä jättämien muistiinpanojen tutkimus on osoittanut, että hän on itsenäisesti tehnyt monia merkittäviä muiden matemaatikkojen nimiin kirjattuja keksintöjä.

17-kulmion konstruoitavuutta koskeneen tiedonannon jälkeen Gaussin seuraava julkaisu oli 1799 ilmestynyt väitöskirja, joka sisälsi hyväksyttävän todistuksen *algebran peruslauseelle* (termi on peräisin Gaussilta). (Täsmällinen todistus vaatisi tietysti täsmällisen reaaliluvun määritelmän, jota Gaussin aikaan ei vielä ollut.) Todistusta olivat aikaisemmin yrittäneet d'Alembertin ohella Euler ja Lagrange. Myöhemmin Gauss palasi aiheeseen ja esitti lauseelle kaikkiaan kolme erilaista uutta todistusta. Gaussin menestys algebran peruslauseen todistuksessa kytkeytyy hänen havaintoonsa mahdollisuudesta esittää kompleksilukuja graafisesti tason vektoreina. (Saman havainnon tekivät samoihin aikoihin itsenäisesti norjalainen maanmittari *Caspar Wessel* (1745–1818) ja sveitsiläinen kirjanpitäjä *Jean Robert Argand* (1768–1822); kompleksilukujen graafista esitystä kutsutaan toisinaan *Argandin diagrammiksi*.) Gauss määritteli kompleksiluvut myös polynomikongruenssien mod $x^2 + 1$ avulla.

Gaussin todistus perustuu polynomiyhtälön $P(x + iy) = 0$ kanssa yhtäpitävään yhtälöön $Q(x, y) + iR(x, y) = 0$. Se toteutuu käyrien $Q(x, y) = 0$ ja $R(x, y) = 0$ leikkauspisteessä; Gauss osoitti, että nämä käyrät aina sijaitsevat niin, että leikkauspisteen täytyy olla olemassa. Gaussin todistus on ensimmäisiä esimerkkejä puhtaasta eksistenssitodistuksesta:

todistus ei antanut kaavaa tai algoritmia yhtälön juuren määrittämiseksi. Gaussin myöhemmista algebran peruslauseen todistuksista viimeinen oli yleisin, sillä se salli polynomin kertoimienkin olla kompleksilukuja.

Gaussin tunnetuin matemaattinen teos on kaksi vuotta väitöskirjan jälkeen (1801) ilmestynyt lukuteoriaa käsittelevä *Disquisitiones arithmeticæ*. Kirjassa otetaan käyttöön *lukukongruenssin* käsite ja merkintä $a \equiv b \pmod p$, todistetaan myös Legendren keksimä ja Eulerin ennakoima *kvadraattinen vastavuoroisuuslause*: jos $p \neq q$, niin

$$(p|q)(q|p) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}$$

(jolle Gauss esitti elämänsä aikana kaikkiaan kuusi eri todistusta) ja annetaan välttämätön ja riittävä ehto säännöllisen monikulmion konstruoitavuudelle euklidisin työkaluin (sivuluvun on oltava luvun 2 potenssin ja Fermat'n alkulukujen $2^{2^{n_k}} + 1$, tulo). (Muuan *Oswald Hermes* (1826–1909) käytti kymmenen vuotta toteuttaakseen säännöllisen 65537-kulmion konstruktion.)

Kvadraattisen vastavuoroisuuslauseen laajennus korkeampien potenssien jäännöksiä koskevaksi johti Gaussin tutkimaan jaollisuuskysymyksiä, jotka koskevat kompleksisia kokonaislukuja eli *Gaussin kokonaislukuja* $a + ib$, missä a ja b ovat kokonaislukuja. Gaussin kokonaislukujen jaollisuus poikkeaa tavallisten lukujen jaollisuudesta: esim. $5 = (2 + i)(2 - i)$ ei ole alkuluku Gaussin kokonaislukujen joukossa. Gauss tunsi ilmeisesti myös alkulukuhypoteesin, vaikkei siitä koskaan mitään julkaissutkaan.

Gaussin pitkäaikaisin virka-asema oli Göttingenin observatorion johtajan tehtävä. Samaan aikaan hän toimi Göttingenin yliopiston matematiikan professorina. Gauss pysyi Göttingenissä loppuikänsä, huolimatta monista tarjotuista paikoista eri akatemioissa.

Tähtitieteen pariin Gauss joutui miltei sattumalta: 1. tammikuuta 1801 tehtiin ensimmäiset havainnot pikkuplaneetta *Cereksestä*. Koska havaintoja oli vähän ja ne olivat epävarmoja (Ceres oli siirtynyt yhteensä vain 3°), tuntui mahdottomalta määrittää uuden taivaankappaleen rataa, mutta Gauss, poikkeuksellisen taitava laskija, suoriutui tehtävästä menestyksellä. Laskelmien sivutuotteena syntyi metodi ratalaskujen suorittamiseksi vain harvojen havaintojen perusteella. Gaussin tähtitieteellinen pääteos *Theoria motus corporum cælestium* vuodelta 1809 sisältää monia matemaattisen tilastotieteen perusasioita; nimitys *Gaussin käyrä* muistuttaa Gaussin tuotannon tästä puolesta.

Gauss osallistui monella tavoin käytäntöä suoraan palvelevaan työhön. Hän mm. suunnitteli ja johti Hannoverin vaaliruhtinaskunnan kolmiomittauksen raskaine kenttätöineen (Hannover on jokseenkin tasaista maastoa, mikä ei ole eduksi kolmiomittaukselle) ja osallistui vanhoilla päivillään aktiivisesti sähkölennättimen keksimiseen. Käytännön geodesia kytkeytyi Gaussilla myös teoriaan. 1820-luvulla hän teki perustavia tutkimuksia pintojen differentiaaligeometriasta. Gaussin ansiota on erityisesti huomion kiinnittäminen pinnan sisäisiin, ulkopuolisesta kolmiulotteisesta avaruudesta riippumattomiin ominaisuuksiin; tällainen ominaisuus on esim. pinnan kokonaiskaarevuus eli sen *Gaussin kaarevuus*.

Gauss tutki fysiikkaakin, erityisesti magnetismia. Magneettivuon tiheyden yksikkö on gauss. Gauss ja hänen fyysikkovirkatoverinsa *Wilhelm Weber* (1804–91) rakensivat 1833 maailman ensimmäisen toimivan sähkölennättimen Weberin laboratorion ja Gaussin observatorion välille. Matkaa oli 3 km. Gaussin magnetismitutkimuksiin liittyy kolmiulotteisessa integraalilaskennassa pinta- ja tilavuusintegraaleja toisiinsa kytkevä *Gaussin lause*.

Gaussin elinaikanaan julkaisematta jättämät muistiinpanot osoittavat, että hän oli edennyt huomattavan pitkälle kompleksimuuttujan funktioteorian suuntaan: hän tunsi elliptisten integraalien käänteisfunktioiden, ns. *elliptisten funktioiden* tärkeän perusominaisuuden, kaksijaksoisuuden, ja *Cauchyn integraalilauseen*, jonka mukaan kompleksimuuttujan analyyttisen funktion integraali pitkin tason sulkeutuvaa käyrää häviää. Sen sijaan Gauss julkaisi itse *hypergeometrista sarjaa*

$$F(x;a,b,c) = 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdots$$

koskevan tutkimuksensa. Tutkimukseen liittynyt täsmällinen todistus sille, että sarja suppenee, on ensimmäinen varsinainen sarjan konvergenssitodistus matematiikan historiassa.

Gaussin julkaisemattomista muistiinpanoista ja kirjeenvaihdosta käy ilmi, että hän oli perillä *epäeuklidisen geometrian* perusteista jo ennen Bólyaita ja Lobatševskia. Gauss yritti selvittää avaruuden geometrista rakennetta myös empiirisesti mittaamalla suurten kolmioiden kulmasummaa. Virhearvioiden rajoissa nämä mittaukset eivät osoittaneet, että kulmasumma olisi muuta kuin 180°.

11 1800-luku – analyysin täsmällistymisen vuosisata

1700-luku oli ollut matemaattisessa analyysissa villin keksimisen aikaa; menetelmät toimivat ja se riitti, loogisten perusteiden pitävyyttä ei juuri kyselty. 1800-luvulle tultaessa kriittisemmät ja enemmän täsmällisyyttä korostavat tutkimusasenteet alkoivat saada jalansijaa. Kompleksilukujen parempi ymmärtäminen johti niiden laajempaan käyttöön ja kompleksimuuttujan funktioteorian syntyyn. Täsmällistämispyrkimykset kytkeytyivät myös korkeamman matematiikan opetukseen, joka lisääntyi huomattavasti École Polytechniquen ja École Normalen kaltaisten oppilaitosten myötä. Opetus pakotti opettajat ja oppikirjojen laatijat miettimään tarkemmin opetettavien asioiden perusteita. – Tässä analyysin kehitystä käsitellään muutaman siihen keskeisesti vaikuttaneen matemaatikon välityksellä. Heistä useiden ansiot ulottuvat muillekin matematiikan aloille.

11.1 Cauchy ja Bolzano

Täsmällisyyden pioneeri analyysissa on (Gaussin ohella) ranskalainen *Augustin Cauchy* (1789–1857). Hän oli École Polytechniquen kasvatti, alkoi uransa insinöörinä, mutta siirtyi pian matematiikkaan ja mm. École Polytechniquen opettajaksi. Cauchyn École Polytechniquelle kirjoittamaan oppikirjasarjaan kuuluva *Cours d'analyse* (1821) perustuu jokseenkin nykyaikaiseen raja-arvon määritelmään, jossa δ ja ϵ eivät kuitenkaan vielä eksplisiittisesti esiinny, ja sarjojen suppenemisen tarkkaan tutkimiseen. Raja-arvon Cauchy määritteli sanallisesti:

> "Jos muuttujan peräkkäiset arvot lähestyvät rajatta kiinteätä arvoa niin, että ne lopulta eroavat tästä miten vähän tahansa, niin mainittua kiinteää arvoa kutsutaan muiden arvojen *raja-arvoksi*."

Todistuksissaan Cauchy kyllä muotoili verbaalisen määritelmänsä (ϵ, δ)-kielelle.

Jatkuvuuden Cauchy määritteli siten, että muuttuja $f(x+\alpha)-f(x)$ tulee mielivaltaisen pieneksi, kun muuttuja α pienenee rajatta. Usean muuttujan funktion raja-arvon suhteen Cauchy erehtyi. Hän oletti että funktio, joka on kunkin muuttujansa suhteen jatkuva, on itsekin jatkuva. Jatkuvien funktioiden väliarvolauseen, Bolzanon lauseen, Cauchy todisti konstruoimalla vähenevän ja kasvavan jonon (X_n), (x_n), $x_n < X_n$, siten että $f(x_n)$ ja $f(X_n)$ ovat erimerkkiset ja $X_n - x_n = \dfrac{1}{m}(X_{n-1} - x_{n-1})$ (jaetaan $[x_{n-1}, X_{n-1}]$ m:ään yhtä pitkään väliin; jonkin näistä päätepisteissä f saa erimerkkiset arvot). Jonot suppenevat kohti yhteistä raja-arvoa x, ja jatkuvuus takaa, että $f(x) = 0$.

Sarjojen suppenemisen systemaattinen tutkiminen ja ylipäänsä suppenemisen tärkeyden oivaltaminen on paljolti Cauchyn ansiota. Suppenemisen juuri- ja suhdetestit esiintyvät hänellä, samoin sarjojen tulon antava Cauchyn kertosääntö. Cauchy yritti todistaa Newtonin binomisarjakehitelmän pätevyyden seuraavasti: Jos $\phi(a) = 1 + ax + \dfrac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots$, niin kertosääntö antaa $\phi(a+b) = \phi(a)\phi(b)$. Mutta Cauchyn jatkuville funktioille todistaman tuloksen perusteella tällaisen funktionaaliyhtälön ratkaisuja ovat funktiot $\phi(a) = \phi(1)^a$. Koska $\phi(1) = 1 + x$, on $\phi(x) = (1+x)^a$. Binomisarjan selvitti lopullisesti Abel v. 1826.

Funktion $y = f(x)$ differentiaali dy on Cauchylle luku $f'(x)dx$, missä dx on äärellinen luku. Funktion integraalin määritelmää Cauchy ei perustanut antiderivaattaan, kuten aikaisemmin oli tehty. Hän määritteli integraalin $\int_a^b f(x)dx$ summien

$$S_n = (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (b - x_n)f(x_n)$$

raja-arvoksi, kun välin (a, b) jakovälien (x_i, x_{i+1}) pituudet lähestyvät nollaa. Integraalin Cauchy, joka ei tuntenut tasaisen jatkuvuuden käsitettä, väitti olevan laskettavissa aina, kun f on jatkuva. Näin määritellyn integraalin ja antiderivaatan yhteyden osoittamiseen Cauchy käytti todistamaansa *differentiaalilaskennan väliarvolausetta*, $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, jonka erikoistapauksen oli tosin esittänyt *Michel Rolle* (1652–1719) yli sata vuotta aikaisemmin, ja väliarvolauseen yleistystä

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Useissa Cauchyn päättelyissä olennaisen Cauchyn *yleisen suppenemisehdon*, sen, että lukujonon (a_n) suppenemiselle on välttämätöntä ja riittävää erotuksen $|a_{n+p} - a_n|$ pienuus suurilla n:n ja kaikilla p:n arvoilla, oli kyllä havainnut myös tšekkiläinen hengenmies *Bernhard Bolzano* (1781–1848), jonka aikaansa edellä oleva tuotanto jäi pitkään laajemmalti tuntemattomaksi. Vuonna 1817 julkaisemassaan kirjasessa, siis ennen Caychya, Bolzano esitti ensimmäisenä täsmällisessä muodossa nykyaikaisen jatkuvuuskäsitteen: f on jatkuva, jos se muuttuu niin, että $f(x + \omega) - f(x)$ voidaan tehdä pienemmäksi kuin mikä hyvänsä annettu suure, kunhan vain ω tehdään niin pieneksi kuin halutaan. – Cauchyn suppenemisehdon todistaminen onnistuu vain, jos reaaliluvun käsite on täsmällisesti määritelty; yksi perhe reaalilukujen määritelmiä ottaa pohjaksi juuri Cauchyn ehdon.

Tasaisen suppenemisen käsite jäi ilmeisesti vielä Cauchylle jonkin verran epämääräiseksi, vaikka hänen myöhemmissä kirjoituksissaan siihen viittaavia seikkoja onkin. Tasaisen suppenemisen määritelmän ensimmäisenä esittäjänä pidetään englantilaista fyysikkoa *George Stokesia* (1819–1903).

Cauchy on (jälleen Gaussin ohella, joka ei kuitenkaan aikalaisille julkaissut tuloksiaan) *funktioteorian* eli kompleksilukumuuttujan kompleksilukuarvoisten funktioiden tutkimuksen perustaja. Jo Euler ja d'Alembert olivat joutuneet hydrodynamiikassa tekemisiin osittaisdifferentiaaliyhtälöparin

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

kanssa, mutta Cauchy totesi näiden yhtälöiden, sittemmin *Cauchyn–Riemannin yhtälöinä* tunnettujen, merkityksen kompleksilukumuuttujan $z = x + iy$ funktion $w(z) = u(z) + iv(z)$ derivoituvuudelle. Cauchy tutki derivoituvien kompleksifunktioiden eli *analyyttisten funktioiden* tason käyriä pitkin muodostettuja integraaleja; vuonna 1825 hän esitti funktioteoriassa keskeisen merkityksen omaavan *Cauchyn integraalilauseen*, jonka mukaan tällaisen funktion yhdesti yhtenäistä aluetta G ympäröivää umpinaista käyrää $\mathcal{C}$ pitkin laskettu integraali aina häviää. Lause on – ainakin jatkuvan derivaatan omaavien funktioiden tapauksessa – yksinkertainen seuraus taso- ja käyräintegraaleja yhdistävästä *Greenin*[1] *kaavasta*:

$$\int_{\mathcal{C}} f(t)\,dt = \int_{\mathcal{C}}(u+iv)(dx+idy) = \int_{\mathcal{C}}(udx - vdy) + i\int_{\mathcal{C}}(vdx+udy)$$
$$= -\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dxdy + i\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

Cauchyn integraalilauseen säännöllisyysoletukseksi riittää pelkkä f:n kompleksisen derivaatan olemassaolo. Tämän osoitti ranskalainen *Edouard Goursat* (1858–1936) vasta vuonna 1900.

Kuusi vuotta myöhemmin Cauchy osoitti, että analyyttinen funktio voidaan kehittää potenssisarjaksi, jonka suppenemissäde on kehityskeskuksen ja funktion lähimmän erikoispisteen etäisyys. Tämä puolestaan perustuu *Cauchyn integraalikaavaan*, jonka mukaan analyyttiselle funktiolle pätee

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

missä $\mathcal{C}$ on mielivaltainen pisteen z sisäpuolelleen jättävä ja z:n kertaalleen positiiviseen kiertosuuntaan kiertävä umpinainen käyrä. Potenssisarjakehitelmä pisteen z_0 ympäristössä saadaan, kun integroitavan nimittäjä kirjoitetaan muotoon $(w - z_0 - (z - z_0))$ ja käytetään geometrisen sarjan summakaavaa. Lagrangen visio kaikkien funktioiden esittämisestä potenssisarjoina tuli näin osittain toteen.

Cauchy on Eulerin jälkeen kaikkien aikojen tuotteliaimpia matemaatikkoja. Hänen tutkimuksensa koskevat useimpia matematiikan aloja. Esim. determinanttien kertosääntö ja determinanttien teoria nykymuodossaan laajemminkin on suurelta osin hänen työtään. Tavallisten sekä osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriassa hänen panoksensa on merkittävä. Cauchyn töiden runsaus ja laajuus sai Ranskan tiedeakatemian määräämään julkaisusarjansa artikkelien enimmäispituuden neljäksi sivuksi. Vuoden 1830 vallankumouksen yhteydessä katolinen ja poliittisilta mielipiteiltään vanhoillinen Cauchy joutui jättämään Ranskan; hän oleskeli maanpaossa mm. Prahassa. Ei ole kuitenkaan mitään todisteita Cauchyn ja Bolzanon mahdollisista yhteyksistä.

11.2 Abel, Jacobi, Dirichlet

Norjassa Finnöyn saarella lähellä Stavangeria syntynyt *Niels Henrik Abel* (1802–29) on yksi niistä (onneksi verraten harvoista) ensi luokan matemaatikoista, joiden elämä on jäänyt traagisen lyhyeksi. Abel oli köyhä ja saapui Euroopan periferiasta. Tämä lienee osasyy siihen, että häntä kohdeltiin tieteellisissä keskuksissa useammin kuin kerran tylysti. Gauss ei vastannut hänen kirjeisiinsä, eikä Ranskan akatemia suostunut ottamaan

---

[1] *George Green* (1793–1841), itseoppinut englantilainen fyysikko, julkaisi kaavan vuonna 1828.

hänen käsikirjoitustaan vastaan, ”koska käsialasta ei saanut selvää”. Abel elätti itseään mm. yksityistunteja antamalla. Uutinen Abelin nimityksestä professoriksi Berliiniin saapui Norjaan vasta Abelin kuoleman jälkeen. Kuolinsyy oli keuhkotauti.

Abel oli ensimmäisiä, jotka oivalsivat suppenemisen tärkeyden päättymättömillä sarjoilla operoitaessa (”matematiikassa ei ole yhtäkään sarjaa, jonka suppeneminen olisi pitävästi osoitettu!”). Hänet muistetaan kuitenkin parhaiten jo Cardanon ajoista jatkuneiden korkeampaa kuin neljättä astetta olevien algebrallisten yhtälöiden algebrallisten ratkaisujen etsimisen lopettajana; viidennen asteen yhtälön yleisen algebrallisen ratkeamattomuuden Abel todisti jo 19-vuotiaana. (Hiukan puutteellisemman viidennen asteen yhtälön ratkeamattomuustodistuksen oli jo ennen Abelia esittänyt italialainen *Paolo Ruffini*, 1765–1822, etevä amatöörimatemaatikko, lääkäri ammatiltaan.)

Abel tutki elliptisiä integraaleja ja oivalsi Legendreltä huomaamatta jääneen elliptisen integraalin käänteisfunktion kaksijaksoisuuden. Saman havainnon tekivät Abelista riippumatta Gauss ja saksalainen *Carl Jacobi* (1804–51), joka myös kehitteli näiden käänteisfunktioiden, *elliptisten funktioiden*, teoriaa pitemmälle. Abelin lähtökohtana oli havainto, että päältä katsoen elliptistä integraalia muistuttavan integraalin

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x$$

ominaisuuksien selvittely käy luontevammin käänteisfunktion $x = \sin u$ kautta. Jacobilta ovat peräisin elliptisten funktioiden ja trigonometristen funktioiden sukulaisuuteen viittaavat elliptisten funktioiden merkinnät sn, cn ja dn. Funktiot osoittautuivat trigonometristen funktioiden tapaan jaksollisiksi, mutta jaksoja on kaksi. Jaksojen suhde ei ole reaaliluku. Kompleksimuuttujia koskeviin ongelmiinsa Abel haki apua Cauchyltä.

Abel kiinnitti myös huomiota integraaleihin

$$\int \frac{1}{\sqrt{P(x)}}\,dx,$$

joissa P on korkeampaa kuin neljättä astetta oleva polynomi, ja näiden käänteisfunktioihin eli *Abelin funktioihin*. Jacobi puolestaan osoitti, että vastaavanlaisia käänteisfunktioita voi tutkia myös, kun muuttujia on useampia.

Abel on luultavasti historian merkittävin pohjoismainen matemaatikko.

Jacobin ansioita on myös (alkuaan Cauchyn käyttöön ottaman) n:n muuttujan n:n funktion systeemin *funktionaalideterminantin* eli *Jacobin determinantin* merkityksen oivaltaminen ja funktionaalideterminanttien systemaattinen teoria – Jacobi halusi pitää tavallisiakin determinantteja n:n muuttujan n:n lineaarifunktion systeemin funktionaalideterminantteina.

Saksalainen, vaikkakin ranskalaista sukua oleva *Peter Lejeune Dirichlet* (1805–59) toimi pitkään professorina Berliinissä, mutta tuli viimein Gaussin seuraajaksi Göttingenin yliopistoon; hänen postuumeina julkaistut lukuteorian luentonsa popularisoivat ja täydensivät Gaussin vaikeasti luettavaa Disquisitiones Arithmeticæ -teosta. Dirichlet'n tunnetuin lukuteoreettinen tulos kertoo, että jos a:lla ja b:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, niin aritmeettisessa jonossa $a_n = an + b$ on äärettömän monta alkulukua. Dirichlet'n keksintöä on myös sinänsä yksinkertaisen *laatikkoperiaatteen* tai *kyyhkyslakkaperiaatteen* (jos $n+1$ esinettä sijoitetaan n:ään laatikkoon, niin ainakin yhdessä laatikossa on enemmän kuin yksi esine) monipuolinen käyttökelpoisuus lukuteoriassa.

Analyytikkona Dirichlet kehitti mm. Fourier'n trigonometrisia sarjoja. Dirichlet oli ensimmäinen vakavasti Fourierin sarjan suppenemista tutkinut matemaatikko. Dirichlet'tä pidetään yleensä modernin funktion määritelmän ensimmäisenä esittäjänä. Fourierin sarjoja käsittelevässä artikkelissa vuodelta 1837 on jakso

> Jos muuttuja y liittyy muuttujaan x siten, että aina kun x:lle annetaan jokin lukuarvo, on olemassa sääntö, jonka perusteella y saa yksikäsitteisen lukuarvon, niin y:n sanotaan olevan x:n funktio.

Itse asiassa yhteys, jossa tämä jakso esiintyy, liittyy jatkuvan funktion määritelmään, ja olennaista on siinä se, että funktion ei tarvitse totella samaa lauseketta koko määrittelyjoukossaan. Melko samoin sanoin oli jatkuvaa funktiota määritellyt jo muutama vuosi aikaisemmin venäläinen *Nikolai Lobatševski* (1793–1856), epäeuklidisen geometrian keksijä. Jo aikaisemmin (1829) Dirichlet oli kuitenkin antanut esimerkin funktiosta, jolla ei ole analyyttista lauseketta: kun x on rationaalinen, niin $y = c$, ja kun x on irrationaalinen, niin $y = d \neq c$.

Dirichlet osoitti, että kohtuullisen säännöllisen funktion f Fourierin sarjan rajafunktio on yleensä f, ja että pisteissä, joissa funktio on epäjatkuva, mutta omaa toispuoliset raja-arvot, sarjan summa on raja-arvojen keskiarvo. – Käsite sarjan ehdollinen suppeneminen on peräisin Dirichlet'ltä.

Dirichlet'n probleema on potentiaaliteorian keskeinen ongelma: alueen G reunalla ∂G määritellyn funktion jatkaminen G:n sisäosaan siten, että jatko toteuttaa Laplacen differentiaaliyhtälön. Probleeman yhteydessä Dirichlet esitti *Dirichlet'n periaatteen* nimellä tunnetun osittain puutteellisen variaatioperiaatteen, joka tuli näyttelemään tärkeää osaa funktioteorian kehityksessä 1800-luvun jälkipuoliskolla. Periaate sanoo, että Dirichlet'n probleeman ratkaiseva funktio f_0 minimoi integraalin

$$\int_G |\nabla f|^2 \, dV$$

kaikkien G:n reunalla annettuun funktioon yhtyvien funktioiden f joukossa. Dirichlet ja periaatetta käyttäneet muutkin matemaatikot eivät selvittäneet, onko minimointitehtävällä varmasti ratkaisu. Asian selvitti lopullisesti vasta Hilbert vuonna 1899.

11.3 Riemann

Dirichlet'n seuraaja Göttingenissä – joka 1800-luvulla ja 1900-luvun alussa oli maailman ilmeisesti merkittävin matemaattinen tutkimuskeskus – oli *Bernhard Riemann* (1826–66), erittäin omaperäinen ja modernin matematiikan kehitykseen syvästi vaikuttanut tutkija. Abelin tavoin Riemann kuoli keuhkotautiin melko varhaisessa iässä.

Riemannin väitöskirja (1851) käsitteli kompleksimuuttujan funktioita. Se sisälsi mm. *Riemannin kuvauslauseen*, jonka mukaan jokainen yhdesti yhtenäinen tasoalue, joka ei ole koko taso, voidaan yksikäsitteisesti ja konformisesti, siis mikroskooppisella tasolla yhdenmuotoisuuskuvauksena, kuvata mille hyvänsä muulle samanlaiselle alueelle jonkin analyyttisen funktion avulla, ja vallankumouksellisen idean analyyttisten funktioiden, kuten $\sqrt{z}$:n, monikäsitteisyyden poistamisesta siten, että funktion määrittelyjoukkona pidetään tasoalueen sijasta sen päällä mahdollisesti useana kerroksena lepäävää pintaa. Tästä oivalluksesta alkunsa saanut *Riemannin pintojen* teoria on sittemmin johtanut analyysin ja topologian monipuoliseen vuorovaikutukseen ja vaikuttanut ratkaisevasti siihen, että topologiasta on kehittynyt oma elinvoimainen matematiikan haaransa.

Riemannin merkittäviä saavutuksia analyysin alalla on Cauchyn integraalia paljon käyttökelpoisempi *Riemannin integraali*, jonka Riemann kehitti Fourier-sarjojen tutkimuksen yhteydessä mahdollistamaan epäjatkuvien funktioiden integroinnin. Riemannin perusidea oli korvata Cauchyn käyttämä arvo $f(x_i)$ integraalia määrittelevissä summissa $\sum f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ mielivaltaisella arvolla $f(\overline{x}_i)$, missä $x_i \le \overline{x}_i \le x_{i+1}$. Integroituvuuden ehdoksi muodostuu se, että summa $\sum O_i(x_{i+1} - x_i)$, missä O_i on f:n kokonaisoskillaatio välillä $[x_i,\, x_{i+1}]$, lähestyy nollaa jaon tihentyessä. Tasaisesti jatkuva funktio on Riemannin mielessä integroituva. Tasainen jatkuvuus ei vielä ollut käsitteenä selkiintynyt Riemannin aikaan. Toisaalta Riemann saattoi antaa esimerkin funktiosta, jolla on äärettömän tiheässä epäjatkuvuuskohtia, mutta joka kuitenkin on integroituva. Riemannin integraalin nykyinen esitystapa, jossa tarkastellaan integroimisjoukon jakoon liittyviä funktion ala- ja yläsummia $\sum m_i(x_{i+1} - x_i)$, $\sum M_i(x_{i+1} - x_i)$, $m_i = \inf_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x)$, $M_i = \sup_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x)$, on peräisin ranskalaiselta *Gaston Darboux*'lta (1842–1917). – Riemann esitti luennoillaan myös esimerkin jatkuvasta funktiosta, jolla ei ole derivaattaa missään. (Tällaisen 1800-luvun funktiokäsitteen perusteita järkyttäneen funktion oli ensimmäisenä konstruoinut Bolzano, mutta muiden Bolzanon töiden tapaan sen kohtalona oli ollut jäädä huomaamatta tieteen keskuksissa.)

Matematiikan kuuluisin avoin kysymys on (kun Fermat'n suuren lauseen ongelma nyt on selvitetty) *Riemannin hypoteesi*. Riemann arveli, että kompleksiluvun $s = \sigma + i\tau$ funktion

$$\zeta(s) = 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)^{-1},$$

missä p_n on n:s alkuluku, meromorfisen jatkon koko tasoon, ns. *Riemannin ζ-funktion*, kaikki ei-reaaliset nollakohdat ovat suoralla $\sigma = \frac{1}{2}$. Riemannin hypoteesi on yhä todistamatta; sillä olisi monia mielenkiintoisia seurauksia lukuteorian alalla. Hadamard ja de la Vallée Poussin käyttivät alkulukulauseen todistuksessa ominaisuutta $\zeta(1 + i\tau) \ne 0$.

Riemann oli nerokas matemaatikko, mutta häntä ei voi varsinaisesti pitää täsmällisyyden apostolina: hänen tutkimusotteensa perustui yleensä geometris-fysikaaliseen intuitioon. Esim. (sinänsä oikean) Riemannin kuvauslauseen todistus perustui puutteelliseen Dirichlet'n periaatteeseen. – Riemannin puhtaasti geometrisista ansioista myöhemmin.

11.4 Weierstrass

1800-luvun jälkipuoliskon matemaattisen analyysin keskeisen hahmon *Karl Weierstrassin* (1815–97) tie matematiikan huipulle oli mutkallinen. Epäonnistuneiden juridiikan opintojen jälkeen Weierstrass hankki oppikoulunopettajan pätevyyden ja toimi pikkukaupungeissa matematiikan opettajana, kunnes matemaattinen maailma hänet ”löysi” 1854. Elämäntyönsä pääosan Weierstrass teki sitten Berliinin yliopistossa.

Weierstrassin asenne matematiikkaan oli jossain määrin Riemannin asenteen vastakohta. Weierstrass pyrki vapauttamaan analyysin kaikesta intuitiivisesta, saattamaan sen vastaansanomattoman vankalle aritmeettiselle pohjalle. Juuri Weierstrass mm. huomautti Riemannille Dirichlet'n periaatteen virheellisyydestä. Weierstrassin ohjelmaa, *analyysin aritmetisointia*, toteutti hänen lisäkseen runsas joukko oppilaita, jotka usein julkaisivat omissa nimissään oikeastaan mestarin käsialaa olevia tuloksia.

Weierstrass vei loppuun Cauchyn aloittaman differentiaali- ja integraalilaskennan perusteiden lujittamisen ottamalla täysin huomioon tasaisen suppenemisen merkityksen mm. eri rajaprosessien järjestyksen vaihdossa. Nykyanalyysin "epsilonistiikka" on varsinaisesti Weierstrassin koulukunnan vakiinnuttamaa. Weierstrass ei pitänyt raja-arvon aikaisempiin määrittelyihin liittyvistä liikkeen mielikuvista ("lähestyy"). Luennoidessaan 1861 Berliinin Teknillisessä korkeakoulussa Weierstrass esitti jatkuvuuden määritelmän seuraavasti:

> jos on mahdollista määrittää h:lle sellainen raja δ, että kaikille h:n arvoille, joiden itseisarvo on pienempi kuin δ, $f(x+h)-f(x)$ on pienempi kuin mielivaltainen suure ϵ, joka voi olla miten pieni tahansa, niin argumentin äärettömän pieniä muutoksia vastaavat funktion arvojen äärettömän pienet muutokset.

Weierstrass todisti, osin Bolzanon esittämiin ideoihin perustuen luennoissaan sitovasti sen, että suljetulla välillä jatkuvan funktion arvojen joukossa on suurin ja pienin. Tulokseen johtava yleinen periaate, se, että rajoitetulla lukujonolla on suppeneva osajono, tunnetaan Bolzanon–Weierstrassin lauseena. Weierstrassin oppilas *Eduard Heine* (1821–81) julkaisi vuonna 1872 todistuksen sille, että suljetulla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.

Myös kompleksifunktioiden teoriaan Weierstrass jätti pysyvän jäljen. Analyyttisten funktioiden teorian lähtökohdaksi Weierstrass määritteli potenssisarjat; funktioteorian keskeiseksi työkaluksi muodostui *analyyttinen jatkaminen*: potenssisarjakehitelmän pätevyysaluetta laajennetaan ottamalla käyttöön uusi kehityskeskus ja alkuperäisen suppenemisympyrän ulkopuolelle ulottuva uusi suppenemisympyrä. Analyyttisen jatkamisen kautta jokainen potenssisarja tulee määrittelemään mahdollisimman laajassa alueessa yleensä monikäsitteisen analyyttisen konfiguraation. Weierstrass lähestyi mielestään puhtaasti analyysin keinoin samaa ongelmaa, jonka Riemann ratkaisi geometrispohjaisesti, pintojen ja monistojen kautta. – Funktioteorian perusteisiin Weierstrass johtui elliptisten ja Abelin funktioiden tutkimuksista, joita hän harjoitti opettajantyönsä ohessa ja joista ensimmäiset julkaistiin koulujen vuosikertomuksissa.

11.5 Irrationaalilukujen luokat ja reaalilukujen täsmällinen määrittely

Reaalilukujen jakautuminen *rationaalisiin* ja *irrationaalisiin* oli periaatteessa tunnettua jo pythagoralaisten ajoista. Euler arveli jo 1740-luvulla, että tietyt luvut saattaisivat olla *transkendettisia*, ts. eivät olisi *algebrallisia* eli kokonaiskertoimisten polynomien nollakohtia. Konkreettisen esimerkin transkendenttiluvusta esitti vuonna 1844 ranskalainen *Joseph Liouville* (1809–82). Liouvillen mukaan transkendettisia ovat kaikki luvut, jotka ovat muotoa

$$\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^{2!}}+\frac{k_3}{10^{3!}}+\cdots,$$

missä k_i:t ovat 1:n ja 9:n välillä olevia kokonaislukuja. Todistus perustuu siihen, että algebrallista lukua ei voi aivan tarkkaan approksimoida rationaaliluvuilla, joiden nimittäjät ovat ylhäältä rajoitettuja. Sittemmin on keksitty vähemmän eksoottisia transkendenttilukuesimerkkejä kuten 0,1001000100001 . . .. Vuonna 1873 ranskalainen *Charles Hermite* (1822–1901) onnistui osoittamaan, että Neperin luku e on transkendenttinen; π:n suhteen saman asian todisti kymmenen vuotta myöhemmin saksalainen *Ferdinand Lindemann* (1852–1939). Lindemannin todistus osoitti lopullisesti, että antiikista asti matemaatikkoja työllistänyt ympyrän neliöintiongelma ei ratkea euklidisin työvälinein. Monien mielenkiintoisten lukujen algebrallisuus tai transkendenttisuus on edelleen avoin: yksi tällainen luku on Eulerin vakio γ.

Monien matemaattisen analyysin loogisten vaikeuksien keskeinen syy oli itse *luvun* käsitteen epämääräisyys. Irrationaaliluku voitiin käsittää rationaalilukujen jonon raja-arvoksi, mutta toisaalta raja-arvon määritelmä jo edellytti, että raja-arvokandidaatti oli olemassa ja siis määritelty. Cauchy ja Bolzano olivat pyrkineet määrittelemään jonon suppenemisen pelkästään sen termien avulla (*Cauchyn kriteeri*), ja Bolzano oli lisäksi pyrkinyt määrittelemään reaaliluvut rationaalilukujonojen avulla, mutta vasta vuosina 1869–72 tällainen määrittely onnistui tyydyttävällä tavalla. Määritelmän esittivät toisistaan riippumatta ranskalainen *Charles Méray* (1835–1911), joka oli jo aikaisemmin kiinnittänyt huomiota mainittuun ristiriitaisuuteen, sekä Weierstrass oppilaansa Eduard Heinen ja tämän yhteistyökumppanin *Georg Cantorin* (1845–1918) kanssa. Lukujonomääritelmässä lähtökohtana ovat rationaalilukujen *perusjonot* eli Cauchyn jonot; tällainen jono (tai jonojen ekvivalenssiluokka) määrittelee reaaliluvun. Reaalilukujen järjestysominaisuudet ja laskutoimitukset palautetaan jonojen termien vastaaviin ominaisuuksiin. Olennaista on, että näin määritellyistä reaaliluvuista muodostetut Cauchyn jonot aina suppenevat kohti jotain reaalilukua. Reaalilukujen joukko on täydellinen, laajennuksia ei tarvita.

Lukujonoihin perustuvan reaaliluvun määrittelyn rinnalle syntyi samana vuonna, 1872, suoremmin reaaliluvun geometriseen mielikuvaan ja Eudoksoksen klassiseen suhdeoppiin kytkeytyvä *Richard Dedekindin* (1831–1916) määritelmä. Sen mukaan reaaliluvun määrittelee jokainen *Dedekindin leikkaus*, rationaalilukujen joukon jako kahdeksi yhteisalkiottomaksi osajoukoksi A ja B, missä jokainen joukon A luku on jokaista joukon B lukua pienempi. Leikkaukset, joissa A:ssa on suurin tai B:ssä pienin luku, vastaavat rationaalilukuja. Reaalilukujen joukon leikkaukset osoittautuvat itsekin reaaliluvuiksi, joten menettelyllä ei voi tuottaa enää reaalilukujen joukkoa laajempia lukujoukkoja.

Irrationaalilukujen täsmällisen määrittelyn epäjaksollisina desimaalilukuina esitti saksalainen *Otto Stolz* (1842–1905) vuonna 1886. Puhtaasti aksiomaattinen reaalilukujen määritelmä on peräisin Hilbertiltä vuodelta 1899.

12 Geometria 1600–1800-luvuilla

Geometria ei 1700-luvulla edistynyt samalla tavalla kuin analyysi. Geometria ei ollut muodikasta ajan johtavien matemaatikkojen parissa. Sen sijaan 1800-luku merkitsi geometriassakin perusteiden selventymistä ja kokonaan uusien metodien esiin tuloa. Eri kehityskulkujen samanaikaisuus ja päällekkäisyys tekee vaikeaksi johdonmukaisen kuvan antamisen muista kuin epäeuklidisen geometrian syntyyn johtaneista tapahtumista.

12.1 Projektiivisen geometrian alkuvaiheet

Renessanssin taideteoreetikot olivat miettineet perspektiivikysymyksiä ja mm. sitä, miten sama kuvio muuntuu, kun sitä katsotaan eri suunnista. Projektiivisen geometrian, olennaisesti kuvioiden projektioissa säilyviä ominaisuuksia tutkivan geometrian haaran, varsinaisena aloittajana pidetään ranskalaista arkkitehtiä *Gerard Desarguesia* (1593–1662). Hänen aikanaan kovin vähälle huomiolle jääneessä tai suorastaan torjutuksi tulleessa teoksessaan (jota painettiinkin vain 50 kappaletta) *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone aved un plan* (Luonnos yritykseksi käsitellä tapahtumia kartion ja tason kohdatessa, 1639) esiintyi omaperäiseen kasviopilliseen terminologiaan puettuna myöhemmin projektiivisessa geometriassa tyypillisiä käsitteitä kuten äärettömän kaukaiset pisteet, joissa yhdensuuntaiset suorat leikkaavat. Desarguesin nimi on parhaiten säilynyt *Desarguesin lauseessa*, jonka mukaan "perspektiivisessä asemassa" sijaitsevien kolmioiden (joiden vastinkärkien kautta kulkevat suorat leikkaavat samassa pisteessä) vastinsivujen jatkeiden leikkauspisteet ovat samalla suoralla. Desargues johti suuren määrän kartioleikkauksien yleisiä ominaisuuksia käyttämällä hyväksi ns. harmonisten pisteistöjen invarianssia projektioissa. Ympyrässä yksinkertaisesti todistuvat lauseet saattoi tällä tekniikalla siirtää yleisiin kartioleikkauksiin.

Desarguesilla oli yksi oppilas, Blaise Pascal. Pascal todisti jo 16-vuotiaana, että kartioleikkauksen sisään piirretyn kuusikulmion vastakkaisten sivujen jatkeiden leikkauspisteet ovat samalla suoralla. Pascalin ajattelu oli nimenomaan projektiivista. Lause on suhteellisen helppo todistaa, jos kartioleikkaus on ympyrä. Pascal päätteli, että teoreeman sisältämät leikkausominaisuudet säilyvät projisoitaessa, joten lause on tosi yleisille kartioleikkauksille. Pascal johti lauseestaan kaikkiaan 200 erilaista seurausta.

Analyyttisen geometrian ja analyysin valtakaudella projektiivisen geometrian synteettiset menetelmät jäivät lähes unohduksiin. Ne nosti uuteen merkitykseen Gaspard Monge ja hänen perustamansa ranskalaisen geometrian koulukunnan huomattavin edustaja *Jean-Victor Poncelet* (1788–1867). *Projektiivinen geometria* itsenäisenä tieteenalana on saanut alkunsa Poncelet'n tutkimuksista.

École Polytechniquessa koulutettu Poncelet osallistui pioneeriupseerina Napoleonin Venäjän-retkeen ja jäi vangiksi; geometriset pääajatuksensa hän kehitti sotavankeudessa

Saratovissa. Poncelet osoitti, että tasogeometrian väittämissä on yleensä mahdollista vaihtaa sanat *piste* ja *suora* keskenään lauseen totuusarvon muuttumatta. Poncelet näki periaatteen johtuvan kartioleikkausten napasuorien ja napapisteiden vastavuoroisuudesta. Tätä *duaalisuusperiaatetta* sovelsi järjestelmällisesti Poncelet'n kilpailija *Joseph Diaz Gergonne* (1771–1859). Toinen Poncelet'n geometrinen prinsiippi oli jatkuvuus: "yleisten" kuvioiden ominaisuudet säilyvät, kun ne muunnetaan jatkuvasti yhtä "yleisiksi" kuvioiksi. Cauchy mm. piti tätä "äärettömän pieniin muutoksiin" pohjautuvaa ajattelua epätäsmällisenä.

Poncelet täydensi geometristen objektien valikoimaa ideaalisilla ja imaginaarisilla olioilla (suora leikkaa aina ympyrän, joko reaalisissa tai imaginaarisissa pisteissä), ja edisti siten matematiikan abstrahoitumista. – Poncelet'n aikaansaannosta on alkujaan myös alkeisgeometrian kaunis tulos *yhdeksän pisteen ympyrästä*: kolmion korkeusjanojen kantapisteet, sivujen keskipisteet ja korkeusjanojen leikkauspisteen ja kolmion kärkien välisten janojen keskipisteet ovat kaikki samalla ympyrällä.

12.2 Synteettinen ja analyyttinen geometria

Poncelet'n metodit olivat yleensä *synteettisiä*, analyysin keinoja käyttämättömiä. Puhtaaksiviljellyimmissä muodoissaan synteettiset metodit esiintyivät sveitsiläissyntyisellä mutta pääosin Berliinissä toimineella *Jakob Steinerilla* (1796–1863), joka mm. keksi *inversion* eli ympyräpeilauksen merkityksen. Steiner ratkaisi useallakin eri tavalla *isoperimetrisen ongelman*, kysymyksen tietynpituisesta käyrästä, joka rajoittaa mahdollisimman suuren tasoalueen. Puhtaana geometrikkona hän ei ymmärtänyt vastaväitteitä, joiden mukaan hänen todistuksensa olisi pätevä vain, jos maksimin olemassaolo on taattu. Weierstrass ratkaisi isoperimetrisen ongelman tyydyttävästi variaatiolaskennan menetelmin.

Poncelet ja Steiner kehittivät menetelmiä euklidisten tehtävien ratkaisemiseksi harppia ja viivoitinta vähemmin välinein. Italialainen *Lorenzo Mascheroni* (1750–1800) oli 1797 osoittanut, että euklidiset konstruktiot voidaan tehdä pelkällä harpilla (jos suora katsotaan piirretyksi, kun kaksi sen pistettä on saatu konstruoiduksi). Poncelet ja Steiner osoittivat, että konstruktiot voidaan tehdä myös pelkällä viivoittimella, jos käytössä on lisäksi yksi kiinteä ympyrä ja sen keskipiste. Vasta vuonna 1927 tuli tietoon, että Mascheronin tuloksen oli jo 1672 anonyymisti julkaissut tanskalainen *Georg Mohr* (1640–97) unohduksiin joutuneessa kirjasessa *Euclides danicus*.

Puhtaasti Eukleideen järjestelmään pohjautuva geometria sai jonkin verran täydennyksiä sekin. Italialainen *Giovanni Ceva* (1647–1734) julkaisi kolmion "merkillisiä pisteitä" koskevia tietoja yhtenäistävän *Cevan lauseen* 1678. Sen mukaan kolmion ABC kärjet vastassa olevien sivujen pisteisiin yhdistävät janat AX, BY ja CZ kulkevat saman pisteen kautta jos ja vain jos $AZ \cdot BX \cdot CY = AY \cdot BZ \cdot CX$. Englantilaisen *Robert Simsonin* (1687–1768) nimi liittyy mielenkiintoiseen kolmion *Simsonin suoraan* (kolmion ympäri piirretyn ympyrän pisteen projektiot kolmion sivuilla ovat samalla suoralla), vaikka ensimmäinen kirjallinen tieto kyseisen suoran löytymisestä on vasta vuodelta 1797. Euler julkaisi "Eulerin suoraa" koskevan tuloksen 1765.

Analyyttiselta kannalta geometriaa tutki mm. *Julius Plücker* (1801–68). Hän keksi – samanaikaisesti eräiden muiden geometrikkojen kanssa – hyödylliset *homogeeniset koor-*

dinaatit. Kun tason pistettä $\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)$ merkittiin kolmikkona (x, y, t), poistui äärettömän kaukaisen pisteen erikoisasema ja pisteen ja suoran duaalisuus kävi ilmeiseksi. Yhtälö

$$pu + qv + rw = 0$$

esittää sekä kaikkia pisteen (u, v, w) kautta kulkevia suoria että kaikkia kolmikon (p, q, r) määrittämän suoran pisteitä. Plücker yleisti duaalisuuden myös avaruuteen (jossa tasot ja pisteet ovat toistensa ja suorat itsensä duaaleja); saman ohjelman toteutti ranskalainen *Michel Chasles* (1793–1880). Chasles käytti ensimmäisenä vektoreihin liittyviä *suuntajanoja*. Yleiseen n-ulotteiseen avaruuteen analyyttisen geometrian yleisti ensimmäisenä monipuolinen englantilainen juristi ja matemaatikko *Arthur Cayley* (1821–95). Cayleyn työkaluina olivat determinantit; kun suoran yhtälö tason homogeenisissa koordinaateissa lausuttuna on

$$\begin{vmatrix} x & y & t \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{vmatrix} = 0,$$

niin vastaava objekti n-ulotteisessa avaruudessa – n:n pisteen kautta kulkeva hypertaso – määrittyy analogisen $(n+1)$-rivisen determinantin avulla.

12.3 Epäeuklidisen geometrian synty

Eukleideen viidennen postulaatin eli paralleeliaksiooman mahdollinen riippuvuus muista aksioomista askarrutti lukuisia matemaatikkoja yli 2000 vuoden ajan. Aksioomaa yritettiin korvata yksinkertaisemmalla tai sitten todistaa oikeaksi muiden aksioomien perusteella. Klaudios Ptolemaios, Proklus, Nasir Eddin al-Tusi ja Omar Khaijjam yrittivät todistaa postulaattia teoreemana. 1700-luvulla italialainen jesuiittamatemaatikko *Girolamo Saccheri* (1667–1733) pyrki todistamaan postulaattia epäsuorasti. Hänen lähtökohtanaan oli nelikulmio, jossa on kaksi suoraa kulmaa ja kaksi yhtä pitkää sivua. Paralleelipostulaatin kanssa yhtäpitävää on, että nelikulmion muut kaksi kulmaa, jotka joka tapauksessa ovat yhtä suuret, ovat suoria. Saccheri oletti kulmat tylpiksi tai teräviksi ja johti seurauksia. Tylpän kulman tapaus johti ristiriitaan (ainakin jos suorat ovat äärettömän pitkiä), mutta terävän kulman tapaus jäi epäselväksi, vaikka Saccheri ilmoittikin päätyneensä myös tässä tapauksessa ristiriitaan. Itse asiassa Saccheri tuli johtaneeksi suuren määrän myöhemmin syntyneeseen epäeuklidiseen geometriaan kuuluvia teoreemoja.

Saccherin päättelyiden kanssa samansuuntaista työtä tekivät sveitsiläissyntyinen *Johann Lambert* (1728–77) ja Legendre. Lambert lähti liikkeelle nelikulmiosta, jonka kolme kulmaa ovat suoria. Oletusta, jonka mukaan neljäs kulma olisi terävä, ei Lambert onnistunut kumoamaan, ja luopui paralleeliaksiomaa koskevan tutkimuksensa julkaisemisesta. Lambertin ystävä *Johann Bernoulli III* painatti tutkimuksen *Die Theorie der Parallelinien* kirjoittajan kuoleman jälkeen 1786. Lambert kuitenkin tunnisti euklidisesta poikkeavan geometrian olemassaolon loogisen mahdollisuuden ja oikeastaan oli tehnyt tällaisen geometrian mallinkin: se olisi ollut sellaisen pallon pinta, jonka säde on negatiivinen.

Legendren suositun oppikirjan *Éléments de Géométrie* (1794) (jonka katsottiin korvaavan Eukleideen Alkeet) eri painoksissa oli laajoja paralleelipostulaatin tarkasteluja. Tekemällä avaruuden äärettömyyttä koskevan lisäoletuksen Legendre osoitti, että kolmion kulmien summa ei ylitä 180°:ta ja että jos on olemassa kolmio, jonka kulmasumma on 180°, niin kaikkien kolmioiden kulmasumma on 180°, jolloin myös paralleelipostulaatti on tosi. Viimeinen Legendren toimittama painos ilmestyi 1833.

Filosofi *Immanuel Kant* (1724–1804) jakoi kuuluisassa teoksessaan *Kritik der reinen Vernunft* (1781) totuudet itsestään selviin apriorisiin ja kokemuksen kautta saatuihin aposteriorisiin. Kantille euklidinen geometria paralleeliaksiomineen edusti apriorista, ihmisen mieleen luonnostaan ankkuroitunutta perustotuutta.

1810-luvulla Gauss vakuuttui mahdollisuudesta korvata paralleelipostulaatti jollakin muulla olettamuksella geometrian järjestelmän silti sortumatta. Koska hän ei julkaissut ajatuksiaan, luetaan *epäeuklidinen geometria* kahden vakiintuneiden tieteellisten keskusten ulkopuolella toimineen matemaatikon ansioksi. Kummallakin on yhteyksiä Gaussiin. Toinen keksijöistä on venäläinen *Nikolai Ivanovitš Lobatševski* (1792–1856), "Geometrian Kopernikus", Moskovasta 800 km itään sijaitsevan Kasanin yliopiston rehtori. Lobatševskin opettaja oli ollut Gaussin ystävä *Martin Bartels* (1769–1833; siirtyi sittemmin Tarton yliopistoon). Lobatševski oli uskonut löytäneensä todistuksen paralleelipostulaatille ja julkaissutkin sellaisen, mutta vuosien 1826 ja 1829 välillä hänelle kävi selväksi, että ristiriidaton geometrian järjestelmä on luotavissa myös siten, että annetun suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta oletetaan kulkevaksi useita eri suoria, jotka eivät leikkaa annettua suoraa. Lobatševskin kirjoitukset levisivät varsin hitaasti, mutta ne tulivat kuitenkin esim. Gaussin tietoon. Vaikka Gauss yksityiskirjeissä kiittikin Lobatševskia, hän ei ottanut julkisesti kantaa tämän tuloksiin. Omien tulostensa julkaisematta jättämistä Gauss perusteli tähtitieteilijä Besselille kirjeessä sanoen, että hän pelkäsi "boiotialaisten huutoja" eli jonkinlaisen julkisen pilkan kohteeksi joutumista.

Toinen epäeuklidisen geometrian keksijä, unkarilainen (oikeastaan Transsilvanian Koloszvárissa, nykyisen Romanian Cluj'ssa syntynyt) upseeri *János Bolyai* (1802–60) oli myös kosketuksissa Gaussiin, sillä hänen isänsä *Farkas (Wolfgang) Bolyai*, itsekin paralleeliaksiooman todistusyrityksiä harrastanut matematiikanopettaja, oli ollut Gaussin opiskelutoveri Göttingenissä. Isän kiihkeänsävyisistä kieltelyistä huolimatta poikakin innostui paralleelipostulaatista ja onnistui kehittämään geometrian, jossa annetun pisteen kautta kulkee äärettömän monta annetun suoran kanssa yhdensuuntaista suoraa. János Bolyain ilmeisesti jo vuonna 1823 valmistunut tutkimus julkaistiin 1832 Farkas Bolyain *Tentamen Juventutem studiosam in elementa matheseos puræ introducendi* -nimisen geometrisen kirjan 26-sivuisena liitteenä nimellä *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens* (Lobatševski julkaisi oman teoriansa 1829 Kasanissa venäjäksi ja 1840 Berliinissä saksaksi). Gauss kieltäytyi jälleen kommentoimasta: "Jos kehuisin tätä työtä, kehuisin itseäni, koska olen ajatellut samoin jo monen vuoden ajan." Tämä Gaussin tunnustus ja samanaikainen prioriteetin kiisto samoin kuin saksankielisen version ilmestyminen Lobatševskin työstä masensivat János Bolyain niin, että hän ei myöhemmin enää julkaissut varteenotettavia matemaattisia töitä. Hänen tiedetään kuitenkin tutkineen mm. kompleksilukuja ja päätyneen niiden esittämiseen reaalilukupareina samoihin kuin Hamilton.

Gaussin, Lobatševskin ja Bolyain geometrian perusajatus on, että etäisyydellä a suorasta AB olevan pisteen kautta kulkee sekä suoria, jotka leikkaavat AB:n että suoria, jotka eivät leikkaa. Jos D on suoralla AB ja $CD \perp AB$, niin C:n kautta kulkevat suorat, jotka ovat

CD:hen nähden vähintään kulmassa $\alpha(a)$, eivät leikkaa AB:tä eli ovat AB:n suuntaisia. Kulma $\alpha(a)$ määräytyy yhtälöstä

$$\tan\frac{\alpha(a)}{2} = e^{-a}.$$

Epäeuklidisen geometrian todellisen merkityksen oivalsi vasta Riemann, jonka kuuluisan, Gaussin antamaan aiheeseen pohjautuvan dosentinväitöskirjan *Ueber die Hypothesesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1854) asenne geometriaan oli varsin abstrakti. Riemann tarkasteli geometrioita, joissa suorat eivät välttämättä ole äärettömiä, ja joissa vallitsee oletus, jonka mukaan suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta ei voi piirtää ollenkaan suoran kanssa yhdensuuntaista suoraa. Riemannin työ sisälsi kauaskantoisen ohjelman: geometrian tutkimuskohde ei ole avaruuden pisteiden, suorien ja tasojen joukko, vaan yleiset n-ulotteiset *monistot*, joiden ominaisuudet määräytyvät monistolla määritellystä metriikasta, joka voi muuttua siirryttäessä pisteestä toiseen. Etäisyyden määrittää differentiaalikaava

$$ds^2 = \sum g_{ij}dx_i dx_j,$$

missä $g_{ij} = g_{ji}$ ovat sellaisia funktioita, että $ds^2 > 0$. Riemannin avaruuskäsitys on mm. yleisen suhteellisuusteorian perustana. Riemann esitti yksinkertaisen mallin geometriasta, jossa kaikki suorat leikkaavat: pallo ja isoympyrät. Myöhemmin italialainen *Eugenio Beltrami* (1835–1900) löysi samanlaisen mallin Lobatševskin ja Bolyain geometrialle; kyseessä oli *pseudopallo*-niminen traktrix-käyrän muodostama pyörähdyspinta.

Epäeuklidisen geometrian voi katsoa vapauttaneen geometrian. Tuli mahdolliseksi rakentaa erilaisiin aksioomajärjestelmiin nojautuvia geometrioita, ja kysymys siitä, minkälainen geometria vallitsee reaalimaailmassa, siirtyi fysiikan puolelle.

12.4 Euklidisen geometrian perusteet

Paralleeliaksiooma ei ole ainoa Eukleideen aksioomajärjestelmän kritiikkiä saanut osa. Eukleides oli ajatellut konkreettista, havaintoon perustuvaa maailmaa, mutta aikaa myöten esiin rupesi tulemaan ajatus, jonka mukaan geometrian peruskäsitteet kuten piste ja suora tosin olivat havaintoon perustuvien asioiden idealisointeja, mutta että ne kuitenkin aksioomissa olivat määrittelemättömiä olioita, ja että teorian kehittely ei missään kohdin saanut nojautua siihen havaintokäsitykseen, joka näistä asioista meillä itse kullakin on. Erityisesti ”välissä olemisen” käsite oli Eukleideella epämääräinen, samoin kuvioden yhtenevyys, jonka määrittelyä pidettiin kehämäisenä.

Merkittävän uuden geometrian aksiomatisoinnin esitti saksalainen *Max Pasch* (1843–1930). Pasch esitti 1882 projektiivisen geometrian aksioomajärjestelmän, mutta sen ajatukset sopivat myös euklidiseen ja epäeuklidiseen geometriaan. Paschille piste, suora, taso ja janojen yhtenevyys olivat määrittelemättömiä peruskäsitteitä, ja aksiomat olivat ne näitä peruskäsitteitä koskevat väittämät, joita oli mahdollista käyttää teoreemojen todistuksissa. Projektiivisen geometrian aksioomista esitettiin Paschin jälkeen useita vaihtoehtoisia versioita.

Euklidisen geometrian uusia aksioomajärjestelmiä esittivät mm. italialainen *Giuseppe Peano* (1858–1932) vuonna 1891 ja saksalainen *David Hilbert* (1862–1943) vuonna 1899 sittemmin monina täydennettyinä uusintapainoksina ilmestyneessä teoksessa *Grundlagen der Geometrie*. Peanon määrittelemättömät peruskäsitteet olivat piste, jana ja liike. Hilbertin järjestelmä oli hengeltään lähellä Eukleideen aksioomia, ja se on saavuttanut pysyvimmän jalansijan. Hilbertin määrittelemättömät käsitteet olivat piste, suora ja taso. Korostaakseen näiden irrallisuutta havaintomaailmasta Hilbert kehotti lukijaa mielessään korvaamaan sanat piste, suora ja taso sanoilla tuoli, pöytä ja oluttuoppi.[1]

Perusobjektien ja aksioomien mielivaltaisuus nosti esiin kysymyksen aksioomien yhteensopivuudesta eli ristiriidattomuudesta. Tätä oli pohdittu jo epäeuklidisten geometrioiden yhteydessä, mutta siellä asia oli palautettu euklidisien mallien avulla euklidiseen geometriaan. Hilbert osoitti geometriansa ristiriidattomuuden rakentamalla analyyttisen mallin, jonka pohjana ovat reaaliluvut. Koska reaaliluvut puolestaan voitiin rakentaa rationaaliluvuista ja nämä kokonaisluvuista, geometrian ristiriidattomuus palautui kysymykseen aritmetiikan ristiriidattomuudesta.

12.5 Klein ja Erlangenin ohjelma

Felix Klein (1849–1925) oli 1800-luvun lopun ja 1900-luvun alun keskeinen matemaattinen organisaattori Saksassa. Hän aloitti uransa Plückerin assistenttina ja toimi suurimman osan elämäänsä Göttingenissä.

1870-luvulla Klein oli jonkin aikaa Erlangenin yliopiston professorina. Hänen siellä 1872 pitämänsä virkaanastujaisesitelmä tunnetaan *Erlangenin ohjelman* nimellä. Klein havaitsi, että algebran piirissä syntynyt *ryhmän* käsite oli sopiva struktuuri kuvaamaan erilaisia geometrisia järjestelmiä. Kutakin geometrista systeemiä karakterisoi tietty tarkasteltavan avaruuden transformaatioiden eli bijektiivisten kuvausten ryhmä; kyseisen systeemin tutkiminen tarkoittaa sellaisten ominaisuuksien selvittämistä, jotka säilyvät invariantteina ryhmän transformaatioissa. Kleinin yleisimpiä transformaatioita olivat projektiiviset transformaatiot, homogeenisissa koordinaateissa

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}$$

Esimerkiksi euklidista metristä geometriaa vastaa tason translaatioiden, peilausten ja kiertojen ryhmä, jonka muunnokset tavallisissa koordinaateissa ovat

$$\begin{aligned} x' &= r_1(x\cos\phi - y\sin\phi + a) \\ y' &= r_2(x\sin\phi + y\cos\phi + b), \end{aligned}$$

r_1, $r_2 = \pm 1$. Erlangenin ohjelman vaikutukset ovat yhä nähtävissä mm. nykyisissä geometrian oppikursseissa.

Kleinilta on peräisin epäeuklidisen geometrian ns. *hyperbolinen malli*, jossa tasoa vastaa ympyräkiekko D, suoria vastaavat ympyrän kehää ∂D vastaan kohtisuorat ympyrät ja äärettömän kaukaista pistettä vastaa ympyrän kehä.

[1] Hilbertin *Grundlagen* sisältää myös ensimmäisen reaalilukujen aksiomaattisen määritelmän.

Kleinin keskeinen asema 1800-luvun lopun matemaattisessa elämässä antoi hänelle loistavat lähtökohdat kirjoittaa 1800-luvun matematiikan historiasta. Kleinin vanhoilla päivillään Göttingenissä pitämiin luentoihin perustuva *Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (1926–27) on harvoja todellisen eturivin matemaatikon kirjoittamia matematiikan historiaa käsitteleviä teoksia. Se on erittäin luettavaa tekstiä edelleen.

13 Algebra 1700- ja 1800-luvuilla

1800-luvulle asti algebran tutkimuskohteeksi ymmärrettiin polynomiyhtälöiden $P(x) = 0$ ratkaiseminen ja ratkaisujen ominaisuuksien tutkiminen. Nykyisten algebran peruskurssien käsitteistö oli 1700-luvulla melkein kokonaan tuntematon.

13.1 Polynomiyhtälön algebrallinen ratkaisu

Ferron, Tartaglian, Cardanon ja Ferrarin tulokset 1500-luvulla jättivät avoimeksi kysymyksen astetta $n \geq 5$ olevien polynomiyhtälöiden ratkeavuudesta. Ratkeavuutta 1600-luvulla pohtinut *Ehrenfried Walter von Tschirnhausen* (1651–1708) osoitti, että toisen asteen polynomiin pohjautuvalla muuttujanvaihdolla n:nnen asteen yhtälöstä saattoi eliminoida termit, joiden asteluku on $n-1$ ja $n-2$. Ruotsalainen *Erland Samuel Bring* (1736–1798) pystyi määrittämään sellaisen neljännen asteen polynomin $y = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$ kertoimet, jotka muunsivat yleisen viidennen asteen yhtälön muotoon muotoon $y^5 + ay + b = 0$.

Syvällisesti algebrallisen yhtälön ratkeavuutta selvitteli Lagrange. Hänen perusoivalluksensa oli tarkastella sellaisia yhtälön juurien funktioita, jotka säilyivät invariantteina joissakin yhtälön juurien permutaatioissa tai saivat usealla eri permutaatiolla saman arvon. Jos esimerkiksi x_1, x_2 ja x_3 ovat kolmannen asteen yhtälön $P(x) = 0$ ratkaisut ja $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ on yhtälön $z^3 = 1$ kompleksijuuri, niin $(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3$ saa juurien eri permutaatioilla vain kaksi eri arvoa. Tämä on yhteydessä siihen, että kolmannen asteen yhtälön resolventtiyhtälö on toista astetta. Lagrangen havainnot johtivat yhtenäiseen proseduuriin annetun yhtälön resolventtiyhtälöiden löytämiseksi. Lagrangen työtä täydensi Ruffini, joka osoitti, että Lagrangen menetelmät eivät voi tuottaa alemmanasteisia resolventtiyhtälöitä, kun alkuperäisen yhtälön asteluku on ainakin 5. Tästä hän veti sen sinänsä ennenaikaisen johtopäätöksen, että viidennen asteen yhtälö ei yleensäkään ole algebrallisesti ratkeava.

Huomattavan panoksen algebrallisten yhtälöiden teorialle antoi Gauss. Kirjassaan Disquisitiones arithmeticæ hän osoitti, että ns. syklotominen eli ympyränjakoyhtälö $x^p - 1 = 0$, missä p on alkuluku, voidaan purkaa jonoksi alemmanasteisia algebrallisia ja algebrallisesti ratkeavia yhtälöitä, ja näiden yhtälöiden asteluvut ovat luvun $p - 1$ tekijöitä. Täten on olemassa korkeankinasteisia algebrallisesti ratkaistavissa olevia polynomiyhtälöitä.

Abel yritti jo koululaisena sovittaa Gaussin esittämää ratkaisumenetelmää yleiseen viidennen asteen yhtälöön. Hän uskoi ensin onnistuneensa, mutta huomasi sitten virheensä. Abelin todistus viidennen asteen yhtälön algebralliselle ratkeamattomuudelle perustui havaintoon, jonka mukaan yhtälö oli algebrallisesti ratkaistavissa, vain jos jokainen ratkaisuissa esiintyvä juurilauseke oli yhtälön juurien ja tiettyjen ykkösenjuurien rationaalilauseke.

Lopullisen muodon algebrallisen yhtälön algebrallisen ratkeavuuden teorialle antoi ranskalainen *Evariste Galois* (1811–32). Galois osoitti v. 1831, että algebrallisen yhtälön juuret ovat lausuttavissa yhtälön kertoimista ja näiden juurista muodostettuina rationaalisina lausekkeina täsmälleen silloin, kun yhtälön juurien permutaatioryhmän tietyllä aliryhmällä, yhtälön *Galois'n ryhmällä*, on sittemmin *ratkeavuudeksi* nimitetty ominaisuus. – Galois on matematiikan historian traagis-romanttisia hahmoja: hän reputti kahdesti École Polytechniquen pääsykokeissa, hänet erotettiin École Normalesta, hän oli mielipiteiltään radikaali ja istui siksi vankilassa, ja hän kuoli – ehtimättä edes 21 vuoden ikään – haavoihin, jotka oli saanut epämääräisen naisen vuoksi syntyneessä kaksintaistelussa. Aikalaiset eivät juuri ymmärtäneet hänen töitään, joista osa joutui käsittämättömästi kadoksiin aikakauskirjojen toimituksissa ja julkaistiin vasta vuosikymmen hänen kuolemansa jälkeen. Kertomus, jonka mukaan Galois olisi kirjoittanut päätutkimuksensa kohtalokasta kaksintaistelua edeltäneenä yönä, on kuitenkin liioiteltu. Sen sijaan Galois'n tuolloin ystävälleen *Auguste Chevalierille* (1806–68) kirjoittama kirje sisälsi Galois'n tutkimusohjelman yleislinjauksen.

13.2 "Algebran vapautuminen"

Samoin kuin geometria 1800-luvulla lakkasi olemasta sidoksissa Eukleideen postulaatteihin tai havaintomaailman näkyvien ominaisuuksien kuvailuun, myös algebrassa alettiin tutkia muita kuin "ennalta annettuja" luonnollisten lukujen tai reaalilukujen järjestelmiä. Algebraan väkisin tulleet negatiiviset ja imaginaariset suureet kaipasivat myös perustelujaan. Ensimmäisiä uutta suhtautumistapaa edustavia algebrikkoja oli englantilainen *George Peacock* (1791–1858). Hän julkaisi vuonna 1830 loogiseen täydellisyyteen pyrkivän algebran oppikirjan – aikaisemmin algebra ymmärrettiin yksinomaan abstraktiksi laskennoksi, ja todistamisen katsottiin kuuluvan vain geometriaan. Peacock esitti, että on kahdenlaista algebraa, aritmeettista ja symbolista. Edellinen kodifioi ei-negatiivisten lukujen laskusäännöt, jälkimmäinen operoi mielivaltaisilla suureilla, jotka eivät välttämättä ole lukuja. Lukujen laskulait ovat kuitenkin yleispäteviä, vallitsee "ekvivalenttien muotojen permanenssi" eli laskulakien säilymisen periaate. Jos kaksi lauseketta ovat ekvivalentit, kun symbolien paikalle sijoitetaan ei-negatiiviset luvut, ne ovat ekvivalentit silloinkin, kun symbolit edustavat mielivaltaisia suureita. Ominaisuudet *kommutatiivisuus*, *distributiivisuus* ja *assosiatiivisuus* tunnistettiin ja nimettiin 1800-luvun alussa.

Peacockin maanmies, logiikan ja joukko-opin *De Morganin laeista* tunnettu *Augustus De Morgan* (1806–71) meni vielä pitemmälle: suureiden sijasta hän manipuloi abstrakteja symboleja, joiden sisältö saattoi olla täysin mielivaltainen. De Morgan ei kuitenkaan pitänyt mahdollisina aritmetiikan laskulaeista poikkeavia järjestelmiä. Pelkkiin mielivaltaisiin aksioomiin, ilman reaalisisältöä, pohjautuvia järjestelmiä hän vertasi palapelin kokoamissen ylösalaisin, katsomatta palojen kuvia.

13.3 Hamilton, epäkommutatiivisuus ja vektorit

Paljon olennaisemmin kuin Peacock tai De Morgan algebraa laajensi irlantilainen *William Rowan Hamilton* (1805–65). Hamiltonin tutkimuksesta *Theory of Algebraic Couples* (1835) on peräisin metodi, jolla lukualueita laajennetaan tarkastelemalla suppeampien alueiden lukupareja. Täten Hamilton määritteli negatiiviset luvut positiivisten lukujen parien avulla ja rationaaliluvut kokonaislukujen avulla. Hamiltonin pyrkimys päästä rationaaliluvuista reaalilukuihin ei ollut erityisen menestyksellinen. Hamilton esitti sen, miten kompleksiluvut ja niiden laskutoimitukset voidaan määritellä reaalilukuparien (a, b) avulla. Täten poistui osa imaginaarilukuihin liittynyttä mystiikkaa.

Hamilton yritti sitkeästi yleistää kompleksilukujen struktuuria myös kolmeen ulottuvuuteen, mutta ei onnistunut. Sen sijaan hän oivalsi 1843, että jos luovutaan kertolaskun vaihdannaisuudesta, niin "neliulotteisille" *kvaternioille*[1] $a+bi+cj+dk$ voidaan määritellä mielekkäästi kerto- ja yhteenlasku, kun symboleille i, j ja k sovitaan $ii = jj = kk = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ ja $ki = -ik = j$. Koska $(ai + bj + ck)(di + ej + fk) = -(ad + be + cf) + (bf - ce)i + (cd - af)j + (ae - bd)k$, kvaternioiden laskusääntö pitää sisällään molemmat normaalit vektorien tulot, skalaari- ja vektoritulon.

Luopumalla kommutatiivisuudesta Hamilton otti askelen kohti algebrallisten struktuurien abstraktiutta ja sopimuksenvaraisuutta. – Hamilton oli erittäin monipuolinen tutkija, joka teki tärkeitä keksintöjä niinkin erilaisilla aloilla kuin mekaniikka ja verkkoteoria. Kvaterniot keksittyään hän omisti loppuelämänsä pelkästään niille. Joukolle Hamiltonin seuraajia kvaterniot muodostuivat lähes uskon asiaksi. Kvaternioteoria laajeni pian mm. *oktonioteoriaksi*.

Hamilton oli varhaiskypsä ja monipuolisesti lahjakas (13-vuotiaana hän saattoi todenmukaisesti sanoa oppineensa jonkin uuden kielen jokaista elinvuottaan kohden). Hän on harvoja matemaatikkoja, joiden runsaaseen alkoholinkäyttöön on kiinnitetty huomiota. Hamiltonin optiikkaa ja mekaniikkaa käsittelevät työt ovat erittäin merkittäviä. Hamiltonin mekaniikka yleisti Lagrangen esittämää variaatioperiaatetta. Mekaanisen systeemin tilaa esittää sen *Hamiltonin funktio* H, energian yleistys, ja systeemin yleistetyt paikka- ja impulssikoordinaatit q_i, p_i noudattavat *Hamiltonin yhtälöitä*

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i.$$

Hamiltonin formulaatiot osoittautuivat aikanaan hyödyllisiksi kvanttimekaniikassa. – Verkkoteorian käsite *Hamiltonin polku*, joka tarkoittaa verkon kaikissa solmuissa kerran ja vain kerran vierailevaa polkua, perustuu Hamiltonin keksimään ja kaupallisestikin markkinoimaan Maailman ympäri -nimiseen peliin. Siinä maapalloa esittävän säännöllisen dodekaedrin kärkiin lyödyt naulat edustivat nimettyjä suurkaupunkeja, joiden kautta tuli pujottaa maailmanympärimatkaa esittävä nyöri.

Epäkommutatiivisen algebran keksijöitä on myös saksalainen *Hermann Grassmann* (1809–77), jonka vuonna 1844 ja uudelleen vuonna 1862 julkaistu vaikeatajuinen *Ausdehnungslehre* sisälsi eriulotteisia vektoreita käsittävän algebrallisen struktuurin. Grassmannin ideoista yksinkertaistui ennen muuta englantilaisen sähkömagnetismin teorian luojan *James Clerk Maxwellin* (1831–79) ja amerikkalaisen fyysikon *Josiah Williard Gibbsin* (1839–1903) käsissä tuttu kolmiulotteisen avaruuden vektorialgebra kaksine vektorien välisine tuloineen, joista toinen ei ole vaihdannainen. Gibbsin *Vector Analysis* julkaistiin v. 1901. Vektorit voittivat konkrettisempina kvaterniot fysiikan apuvälineinä. Grassmannin kirjoituksissa esiintyi implisiittisesti yleisen lineaarisen avaruuden käsite; lineaarisen avaruuden

[1] Usein näkee käytettävän nimitystä *kvaternioni*.

eli vektoriavaruuden aksiomaattisen määrittelyn esitti ensimmäisenä italialainen *Giuseppe Peano* (1858–1932) vuonna 1888. Lineaarinen avaruus vakiintui matematiikan käsitteistöön vasta 1900-luvulla.

Kvaterniot inspiroivat lukuisia lukujärjestelmän laajennuksia. Weierstrass osoitti 1861, että yleisin lukujärjestelmä, jolla on kaikki reaali- ja kompleksilukujen hyvät ominaisuudet, on kompleksilukujen järjestelmä.

13.4 Matriisit

Myös *matriisialgebran* synty ajoittuu 1800-luvun puoliväliin. Matriisien ei-kommutatiivisen kertolaskun ja yleensä konvention merkitä $m\times n$:n luvun suorakaiteen muotoon järjestettyä lukujoukkoa yhdellä kirjaimella keksi 1858 Arthur Cayley tarkastellessaan kahden lineaarisen transformaation

$$(x, y) \mapsto (ax + by,\, cx + dy) \qquad \text{ja} \qquad (u, v) \mapsto (Au + Bv,\, Cu + Dv)$$

yhdistämistä. Sen, että yhdistäminen johtaa transformaatioon $(x,\, y) \mapsto ((Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y,\, (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y)$ oli kirjannut jo Gauss. Determinanttien teoria oli syntynyt jo aikaisemmin matriiseista riippumatta. Determinantin merkitseminen kahden pystyviivan avulla,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

on Cayleyn keksintö.

Cayleyn ja hänen maanmiehensä *James Sylvesterin* (1814–97) tutkimuksen pääkohteena olivat ns. *muodot* eli kahden tai useamman muuttujan tasa-asteiset polynomit ja niiden *invariantit* eli sellaiset kerrointen funktiot, jotka säilyvät muuttumatta, kun suoritetaan tiettyjä muuttujanvaihtoja. (Esim. muodon $ax^2 + 2bxy + cy^2$ yksi invariantti koordinaatiston kierron suhteen on diskriminantti $b^2 - ac$.) Sylvesteriltä on peräisin metodi muodon muuntamiseksi *pääakselimuotoon*, jonka erikoistapaus on analyyttisesta geometriasta tuttu toisen asteen käyrän tai pinnan yhtälön saattaminen kanoniseen normaalimuotoon. – Cayley toimi paitsi matemaatikkona myös lakimiehenä. Sylvester puolestaan oli paitsi matemaatikko, myös vakuutusjohtaja ja ammattijuristi. (Sylvester oli Oxfordin yliopiston lakitieteen kunniatohtori.) Hän opetti kahteen otteeseen Yhdysvalloissa Baltimoren Johns Hopkins -yliopistossa ja on ensimmäisiä korkeamman matematiikan edustajia Amerikassa. Sana *matriisi* on Sylvesterin käyttöön ottama. (Etymologia on 'kohtu' (vrt. mater, 'äiti'). Kielikuva lienee tullut matematiikkaan kirjapainon ladelman kehikon kautta.) Sylvester otti myös käyttöön mm. termit *invariantti*, *diskriminantti* ja *Jacobin determinantti*.

Invarianttiteoria oli 1800-luvun jälkipuoliskolla merkittävä tutkimuskohde. Erilaisten yksittäisten polynomityyppien invarianttien etsimisen rinnalle kohosi kysymys täydellisten invarianttisysteemien olemassaolosta. Tällä tarkoitettiin tietyn muuttujamäärän ja asteen määräämää perusinvarianttien joukkoa, jonka avulla kaikki invariantit olisivat ilmaistavissa. Hilbert ratkaisi kysymyksen 1888 esittämällä invarianttien tasoa yleisemmän lauseen, jonka seurauksena täydellisten invarianttisysteemien olemassaolo tuli ilmeiseksi.

Hilbertin tulos teki suuren osan invarianttiongelmista turhiksi, ja tämän matematiikan alan tutkimus hiipui.

13.5 Algebralliset struktuurit

Vanhin algebran peruskursseilla opetettavista algebrallisista struktuureista on *ryhmä*. Ryhmäkäsitteeseen johduttiin aluksi polynomiyhtälön ratkaisujen yhteydessä; jo Lagrange ja Ruffini esittivät tarkasteluja, joihin sisältyy implisiittisesti ryhmä. Sanaa ryhmä sen nykyisessä teknisessä merkityksessä käytti ensi kerran Galois. Se, että kommutatiivista ryhmää kutsutaan *Abelin ryhmäksi*, perustuu Abelin yhtälönratkaisuteoriassa esiintyviin keskenään vaihdannaisiin funktioihin, jotka lausuvat yhtälön eri juuria yhden tietyn juuren avulla.

Ryhmiä, etenkin ns. substituutioryhmiä eli permutaatioryhmiä, tutkivat useat 1800-luvun puolivälin matemaatikot, mm. Cauchy. Abstraktin ryhmän määritelmän, jossa ryhmän laskutoimitus esitetään taulukon muodossa, julkaisi ensi kerran Arthur Cayley 1854, mutta Cayleyn määritelmä ei juuri saanut huomiota osakseen. Vuonna 1870 saksalainen *Leopold Kronecker* (1823–91) esitti abstraktin (kommutatiivisen) ryhmän uutena asiana. Lopullisesti ryhmän aseman matematiikassa vakiinnutti ranskalaisen *Camille Jordanin* (1838–1922) vuonna 1870 julkaisema *Traité des substitutions*. Samoihin aikoihin norjalainen mutta myös Saksassa vaikuttanut *Sophus Lie* (1842–99) havaitsi ryhmästruktuurin arvon differentiaaliyhtälöiden teoriassa ja Felix Klein geometriassa. *Lien ryhmät* ovat ryhmiä, joissa algebrallisen struktuurin ohella on topologinen struktuuri, jonka suhteen ryhmän operaatiot ovat jatkuvia funktioita. Lien ryhmien käyttöalaa on mm. osittaisdifferentiaaliyhtälöiden integrointi.

Käsitteet *kunta, rengas* ja *ideaali* tulivat matematiikkaan saksalaisten *Eduard Kummerin* (1810–93), Leopold Kroneckerin ja Richard Dedekindin algebrallista lukuteoriaa koskevien tutkimusten myötä. Kunta tosin oli implisiittisesti läsnä jo Galois'n tarkasteluissa. Abstraktin aksiomaattisen määritelmän nämä struktuurit saivat vasta 1900-luvulla.

Kummerin tutkimusten tavoite oli todistaa Fermat'n suuri lause. Kummerin metodina oli tehtävän muuttaminen kertolaskumuotoon (esimerkiksi $x^3+y^3 = (x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y)$, missä ω on yhtälön $x^3 = 1$ kompleksijuuri.) Kummer ei ensin ottanut huomioon kompleksisissa kunnissa tapahtuvan tekijöihin jaon mahdollista monikäsitteisyyttä. Epätarkkuuksien korjaaminen johti ideaalin ja pääideaalin käsitteisiin, ja pitäviin Fermat'n lauseen todistuksiin. Ennen Kummeria tulos tiedettiin todeksi eksponentin arvoilla 3, 4, 5, 7 ja näiden kerrannaisille. Kummer onnistui osoittamaan Fermat'n otaksuman todeksi kaikille sataa pienemmille eksponenteille.

Berliinissä omavaraisena matemaatikkona ja viimein professorina toiminut Kummerin oppilas Kronecker muistetaan paitsi algebrikkona myös jyrkästä täsmällisyysohjelmastaan: matematiikassa tuli hyväksyä vain asiat, jotka olivat palautettavissa luonnollisten lukujen ominaisuuksiin. Täten esim. irrationaalilukujen olemassaolo oli hänen mielestään kyseenalaista. (”Kokonaisluvut on hyvä Jumala luonut, kaikki muu on ihmistyötä.”) Kroneckerin asenteesta löytyy perustelu kunta-käsitteelle. Jos jonkin sinänsä hyödyllisen luvun kuten $\sqrt{2}$:n olemassaolo ei ole taattua, sen käytön on perustuttava konstruktioon, tässä tapauksessa sellaiseen rationaalilukujen kunnan kuntalaajennukseen, joka tuo mukanaan tämän elementin.

14 Logiikka ja joukko-oppi

Analyysi, geometria ja algebra ovat kaikki vanhoja ja klassillisia matematiikan osa-alueita. 1800-luvulla syntyi kokonaan uusiakin matematiikan lohkoja. Merkittävimpiä niistä ovat *matemaattinen logiikka* ja *joukko-oppi*.

14.1 Matemaattisen logiikan synty

Sinänsä logiikka, oppi päättelemisen säännöistä filosofian osana, kuului jo antiikin kreikkalaisten käsitteistöön. Aristotelisen logiikan keskeinen työkalu oli *syllogismi*, joka koostuu "ylälauseesta", "alalauseesta" ja "päätöslauseesta". ("Kaikki ihmiset ovat kuolevaisia. Sokrates on ihminen. Siis Sokrates on kuolevainen.") Keskiajalla skolastikot kehittivät Aristoteleen logiikan järjestelmää edelleen. Kun algebra tuli geometrian tueksi analyyttisen geometrian muotoutuessa 1600-luvulla, syntyi ajatuksia myös "laskennallisesta logiikasta". Tällaisia esitti mm. Leibniz. Leibniz yritti kehittää järjestelmää, jossa jokaista primitiivistä käsitettä vastaisi alkuluku ja käsitteiden yhdistelyä kertolasku: jos 3 on ihminen ja 7 rationaalisuus, niin 21 olisi rationaalinen ihminen.

Luonnollisen kielen merkityssisällöistä irrallaan olevan *matemaattisen logiikan* perustajana pidetään kuitenkin itseoppinutta, alakoulunopettajana itseään ja vanhempiaan 16-vuotiaasta elättänyttä mutta viimein professoriksi Irlannin Corkiin päätynyttä englantilaista *George Boolea* (1815–64), joka julkaisi vuosina 1847 ja 1854 teokset *Mathematical Analysis of Logic* ja *Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probability*. Teokset sisältävät *joukkoalgebran* eli *Boolen algebran* esittelyn ja selvityksen siitä, miten syllogistiset päättelyt ovat käännettävissä algebran kielelle. Boole käytti yhdisteen ja leikkauksen symboleina merkkejä $+$ ja $\times$, ja yhdiste oli hänelle eksklusiivinen. Koska syllogismit ovat oikeastaan joukkoja ja osajoukkoja koskevia väittämiä, Boolen algebra kattoi klassisen logiikan.

Boole teki muillakin matematiikan aloilla samanlaisia formalisoivia ja algebrallistavia keksintöjä: hän huomasi käyttää *differentiaalioperaattoria* $D = \dfrac{d}{dx}$ ja sen symbolista manipulointia differentiaaliyhtälöiden teoriassa. Bertrand Russellin mielipiteen mukaan "Boole keksi puhtaan matematiikan". Boolen työtä jatkoivat mm. Augustus De Morgan ja amerikkalainen *Benjamin Peirce* (1809–80), jotka keksivät *De Morganin säännön* nimellä tunnetun duaalisuussäännön loogisen summan ja tulon vaihdettavuudesta. Joukkoalgebran graafisen havainnollistuksen, *Vennin diagrammit*, keksi englantilainen *John Venn* (1834–1923).

14.2 Matematiikan perusteet

Matemaattisen logiikan ja yleisen matematiikan perusteiden täsmällistämispyrkimysten myötä syntyi 1800-luvun lopussa vaatimuksia palauttaa matematiikan perusteet, ennen muuta aritmetiikka, "primitiivisemmäksi" koettuun logiikkaan ja rakentaa matematiikan järjestelmä deduktiivisesti loogisten aksioomien päälle samoin kuin Eukleides oli rakentanut geometrian omille aksioomilleen ja postulaateilleen. Perusongelmaksi muodostui kysymys siitä, mitä ovat luonnolliset luvut.

Richard Dedekind määritteli luonnolliset luvut äärettömän joukon S ja siinä määritellyn seuraajarelaation avulla. Luonnollisten lukujen joukko on kaikkien sellaisten S:n osajoukkojen K leikkaus, jotka sisältävät 1:n ja jokaisen alkionsa myötä myös tämän seuraajan. Toisenlaista ohjelmaa yrittivät toteuttaa saksalainen *Gottlob Frege* (1848–1925), joka pyrki määrittelemään luonnolliset luvut keskenään yksikäsitteiseen vastaavuuteen asetettavissa olevien äärellisten joukkojen ekvivalenssiluokkina, ja hänen työtään suurella *Principia Mathematica* -teoksellaan (1910–13) jatkaneet englantilaiset *Alfred North Whitehead* (1861–1947) ja *Bertrand Russell* (1872–1970). Fregeä voidaan pitää symbolisen logiikan perustajana. Hänen vuonna 1879 julkaisemansa *Begriffschrift* sisältää lause- ja kvanttorilogiikan symbolit. Fregen pääteos on *Grundgesetze der Arithmetik* (1893–1903). Sen oli tarkoitus esittää aritmetiikka ja siis matematiikka kaikkiaankin logiikan jatkeena. Juuri, kun teoksen toinen osa oli menossa painoon, Frege sai Russellilta kirjeen, joka sisälsi tiedon Fregen järjestelmän tyhjäksi tekevästä paradoksista. Kirjassa on surullinen loppuhuomautus siitä, että koko rakenelmalta on viety pohja pois. Frege ei toipunut tästä iskusta.

Italialainen Giuseppe Peano loi oman ohjelmansa, jonka tavoite oli koko matematiikan esittäminen yhtenäisen loogisen kalkyylin avulla. *Peanon aksioomat*, jotka määrittelevät luonnolliset luvut, ovat osa tätä ohjelmaa. Peano julkaisi aksioomansa 1889. Peanon aksioomien mukaan luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ karakterisoi luku 1, injektiivinen seuraajarelaatio $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jolle pätee $s(k) \neq 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja induktioaksiooma muodossa, joka kertoo, että joukko $S \subset \mathbb{N}$, jolle $1 \in S$ ja $s(S) \subset S$, on sama kuin $\mathbb{N}$. [Ohimennen voi tästä havaita, mikä on Peanon ja matematiikan kanta yleisemminkin "pedagogiseen kiistakysymykseen" siitä, onko 0 luonnollinen luku vai ei.] – Peano antoi merkittävän panoksen myös matemaattiseen analyysiin mm. differentiaaliyhtälön ratkaisun olemassaoloa koskevilla tutkimuksillaan ja avaruuden täyttävää käyrää koskevalla esimerkillään. Vuonna 1903 Peano esitti keksimänsä keinotekoisen kielen *latino sine flexione* (taivutusmuodoton latina), ja uhrasi sen jälkeen enää vain vähän tarmoaan matematiikalle.

14.3 Cantor ja joukko-oppi

Äärettömän ongelma oli monella tavoin askarruttanut antiikin sofisteja ja keskiajan skolastikkoja. Galileo Galilei oli ohimennen havainnut äärettömän joukon tunnusomaisen piirteen: hän huomautti, että neliöluvut voidaan asettaa yksikäsitteiseen vastaavuuteen luonnollisten lukujen kanssa, vaikka edelliset selvästi muodostavat vain pienen osan jälkimmäisistä. Gauss ja Cauchy pitivät tällaisten paradoksien olemassaoloa osoituksena siitä, että todellisen äärettömyys ei ole mahdollinen. Sen sijaan Bernhard Bolzano, joka mm. osoitti yksinkertaisen geometrisen konstruktion avulla, että välillä (0, 1) on "yhtä monta" pistettä kuin välillä (0, 2), esitti kuolemansa jälkeen julkaistussa *Paradoxen des Unendliches* -teoksessaan, että tämä äärettömän joukon ominaisuus on hyväksyttävä. Dedekind sitten teki joukon ja sen osajoukon yhtämahtavuudesta äärettömän joukon määrittelevän ominaisuuden.

Huomattavasti Dedekindiä pitemmälle äärettömyyksien luokittelussa pääsi Georg Cantor. Alkusysäyksen asiaa koskeville pohdinnoilleen Cantor sai Fourier-sarjojen yksikäsitteisyyden yhteydessä esiin tulevista ongelmista, jotka koskevat laajahkossa joukossa epäjatkuvien funktioiden kehitelmiä. Joukkoja käsittelevien Cantorin kirjoitusten sarja alkaa vuonna 1874. Se sisältää äärettömien joukkojen hierarkkisen luokittelun ja äärettömien kardinaali- ja ordinaalilukujen aritmetiikan. Cantorin tekemistä huomioista olennaisin oli, että äärettömien joukkojen mahtavuuden ei tarvitse olla sama, toisin kuin esim. Bolzano oli ajatellut. Tähän liittyy luonnollisesti kysymys konkreettisten joukkojen mahtavuudesta eli *kardinaliteetista*. Cantor osoitti, että rationaaliluvut voidaan asettaa jonoon

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \ldots,$$

joten rationaalilukujen joukon mahtavuus on sama kuin luonnollisten lukujen. Cantor osoitti edelleen, että algebrallistenkin lukujen joukon mahtavuus on sama kuin luonnollisten lukujen. Tämä perustuu siihen, että kokonaislukukertoimiselle, nollapolynomista eroavalle polynomille voidaan määritellä *korkeus*, joka on polynomin asteluvun ja sen kertoimien itseisarvojen summa. Kutakin korkeutta kohden on väin äärellinen määrä algebrallisia lukuja, jotka saadaan kyseistä korkeutta olevien äärellisen monen polynomin nollakohdista, joita kullakin polynomilla on vähemmän kuin polynomin korkeus. Joukkoja, joiden mahtavuus on korkeintaan sama kuin luonnollisten lukujen joukon, Cantor rupesi kutsumaan *numeroituviksi*, ja niiden mahtavuudelle hän otti käyttöön merkinnän $\aleph_0$, alef-nolla, heprean aakkosten ensimmäisen kirjaimen mukaan.

Toisaalta Cantor osoitti, että reaalilukuja on "enemmän" kuin kokonaislukuja. Jos nimittäin (x_n) on numeroituva jono reaalilukuja, on melko helppo konstruoida rationaalilukupäätepisteiset välit $I_n = (a_n, b_n)$, joille $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \ldots$ ja $x_n \notin I_n$. Leikkaukseen $\cap I_n$ kuuluvat luvut eivät voi olla jonossa (x_n), joten (x_n) ei voi olla kaikkien reaalilukujen jono. Myöhemmin Cantor sai näytettyä saman asian tunnetulla diagonaalikonstruktiollaan, jossa reaalilukujen numeroitumattomuus osoitetaan olettamalla luvut pannuiksi jonoon ja rakentamalla luku, jonka jokainen n:s desimaali on aina eri kuin jonon n:nnen luvun n:s desimaali. Samaa ideaa soveltaen Cantor osoitti, että joukon osajoukkojen kokoelman mahtavuus on aina joukon omaa mahtavuutta suurempi. Näin erisuuruisia äärettömiä mahtavuuksia on niitäkin äärettömän paljon. Samaa perusideaa käyttäen Cantor sai myös rakennettua injektion n-ulotteisesta avaruudesta reaalilukujen joukkoon.

Cantor esitti myös *kontinuumihypoteesin*, jonka mukaan ei ole olemassa joukkoa, jonka mahtavuus olisi suurempi kuin luonnollisten lukujen mutta pienempi kuin reaalilukujen. Hypoteesia ei voi todistaa eikä kumota; sen sijaan tiedetään (*Kurt Gödelin* (1906–78) v. 1938 ja amerikkalaisen *Paul Cohenin* (1934–2007) v. 1963 saamien tulosten perusteella), että kumpikaan vaihtoehto ei ole ristiriidassa joukko-opin aksioomien kanssa.

Cantorin ajatukset kohtasivat runsaasti vastustusta. Osin vastustajat, joista arvovaltaisin oli Kronecker, olivat yksinkertaisesti ennakkoluulojen vallassa, mutta joukon käsitteen epämääräisyys antoi aiheen myös vakaville vastaväitteille. "Liian suuriin" joukkoihin liittyvät ristiriitaisuudet kuten esittäjänsä mukaan nimetty, Fregen ohjelman tuhonnut *Russellin paradoksi* – joukko, jonka alkioina ovat ne joukot, jotka eivät ole itsensä alkioita, on itsensä alkio, jos ja vain jos se ei ole itsensä alkio – antoivat aiheen etsiä joukko-opille sellaista aksiomaattista perustaa, joka sulkisi paradoksit tai paradokseja aiheuttavat joukot pois. Aksiomaattisen lähestymistavan kautta joukko-oppia pyrki pelastamaan mm. saksalainen *Ernst Zermelo* (1871–1956), kun taas Whitehead ja Russell kehittivät *Principia Mathematica* -teoksessaan samaan tarkoitukseen joukkoja luokittelevan *tyyppiteorian*. Zermelo muotoili myös monissa yhteyksissä tärkeän ja sittemmin joukko-opin muista aksioomista riippumattomaksi osoittautuneen *valinta-aksiooman*. – Cantor ei lopulta kestänyt matematiikkaansa kohdistettua ankaraa kritiikkiä. Elämänsä viimeiset vuodet hän vietti mielisairaalassa.

Matemaatikkojen jokapäiväisenä työkalunaan käyttämä yksinkertainen joukko-oppi yhdisteen, leikkauksen ja komplementin käsitteineen on olennaisesti sama kuin Boolen algebra; itse asiassa Boole tulkitsikin algebransa alkiot juuri joukoiksi.

15 Todennäköisyyslaskenta: ajanvietteestä tiedettä

Todennäköisyyslaskentaan on viitattu lyhyesti useissa yhteyksissä edellä. Tarkastellaan todennäköisyyslaskennan kehitystä 20. vuosisadan alkuun mennessä hiukan kootummin.

Varhaisimpia todennäköisyyteen liittyviä tarkasteluja on löydetty Talmudista, juutalaisesta laista, jossa esiintyy sääntöjä yhdistettyjen tapahtumien todennäköisyykisen laskemiseksi. Näiden päättelyjen tarkoitus on ollut oikeuttaa juridisia ratkaisuja. Varsinaisesti todennäköisyyslaskennan katsotaan saaneen alkunsa uhkapeleistä.

15.1 Alku uhkapeleissä

Uhkapeleihin liittyvää laskentoa lienee harjoitettu pitkään. Cardano oli noin vuonna 1526 kirjoittanut noppapeleistä kirjan *Liber de Ludo Aleæ*, Noppapelien kirja, jossa esiintyy todennäköisyyksien kertolaskusääntö. Kirja julkaistiin vasta Cardanon kuoleman jälkeen.

Varsinaisen todennäköisyyslaskennan katsotaan saaneen alkunsa siitä, kun *Chevalier de Méréna* tunnettu *Antoine Gombaud* (1607–84) esitti Pascalille kaksi kysymystä uhkapeleistä. Näistä ensimmäinen koski peliä, joka koostuu pelieristä, joiden voittamiseen kummallakin pelaajalla on samat mahdollisuudet. Jos esimerkiksi ensimmäisenä kuusi erää voittanut saa pelipanoksen, mutta peli joudutaan keskeyttämään tilanteessa, jossa toinen pelaaja on voittanut viisi ja toinen kolme erää, niin mikä on oikeudenmukainen tapa jakaa pelipanos? Kysymys oli ollut pohdinnan kohteena jo pitkään. Luca Pacioli oli ehdottanut jakosuhdetta $5 : 3$, Tartaglia $2 : 1$. Pascal ja Fermat käsittelivät ongelmaa kirjeenvaihdossaan ja päätyivät samaan ratkaisuun ($7 : 1$), edellinen Pascalin kolmiota hyödyntävällä rekursiopäättelyllä, jälkimmäinen alkeistapaukset laskevalla kombinatorisella päättelyllä.

Toinen de Mérén kysymys koski kahden nopan heittoa. Monestako kahden nopan heitosta koostuvassa pelissä kannattaa lyödä vetoa sen puolesta, että heittosarjassa on kaksoiskuutonen? Pelurien nyrkkisäännön mukaan kysytty lukumäärä olisi $\frac{4}{6} \cdot 36 = 24$, mutta empiirinen kokemus asetti tämän kyseenalaiseksi.

Pascal sovelsi eräänlaista odotusarvon teoriaa teologiaan: ihminen voi elää joko niin kuin jumala olisi olemassa tai niin kuin jumalaa ei olisi olemassa. Jos jumalaa ei ole olemassa, elämäntavan valinta on merkityksetön. Jos taas jumala on olemassa, oikea elämäntapa johtaa pelastumiseen, väärä kadotukseen. Koska edellinen vaihtoehto on äärettömän paljon parempi kuin jälkimmäinen, oikean elämätavan valinnan tuottama odotusarvo on suurempi, vaikka jumalan olemassaolon todennäköisyys olisi pienikin.

Hollantilaisen Christiaan Huygensin kirjanen *De Ratiociniis in Aleæ Ludo* ilmestyi 1657. Siinä tarkastelun pohjana on odotusarvo: jos pelissä on p mahdollisuutta voittaa summa a ja q mahdollisuutta voittaa summa b, peliin kannattaa enintään sijoittaa summa $x = \frac{pa + qb}{p + q}$. Tätä periaatetta soveltaen Huygens osoitti, että 24 kaksoisnopanheiton pelissä ei kannata lyödä vetoa kaksoiskuutosen puolesta, mutta 25 heiton pelissä kylläkin.

15.2 Suurten lukujen laki ja normaalijakauma

Jakob Bernoulli yleisti Pascalin pelipanoksenjako-ongelman ratkaisua tilanteisiin, joissa voitto ja tappio eivät olleet symmetrisiä. Näin hän tuli määritelleeksi yleisen binomijakauman. Jos onnistumisen mahdollisuuksia on a ja epäonnistumisen b, niin todennäköisyys onnistua k kertaa n:stä yrityksestä on Bernoullin mukaan

$$\frac{\binom{n}{k}a^k b^{n-k}}{(a+b)^n}.$$

Bernoullin *Ars Conjectandi* (1713) laajensi todennäköisyyskäsitystä pelkistä nopan vaihtoehdoista arkitodellisuuteen. Bernoulli arveli, että absoluuttista varmuutta on monesti vaikea saavuttaa, mutta että *moraalinen varmuus* vallitsee silloin, jos arveltu asiaintila esiintyy 999 kertaa tuhannesta. Moraalisen varmuuden teoriaa Bernoulli sovelsi tilanteeseen, jossa toistuvilla havainnoilla päätellään jakauma. Jos mustia ja valkeita kuulia on uurnassa r ja s kappaletta ja X on N:llä nostolla saatujen mustien kuulien määrä, niin Bernoulli päätteli, että tarpeeksi suurilla N:n arvoilla $\frac{X}{N}$ poikkeaa luvusta $\frac{r}{r+s}$ vähemmän kuin $\frac{1}{r+s}$ vain harvemmin kuin kerran tuhannessa nostosarjassa. Bernoullin laskelmat osoittivat, että jos $r = 30$ ja $s = 20$, luvuksi N kelpaa ainakin 25 550. Bernoullin pettymykseksi luku oli näin suuri, joten suurten lukujen lain soveltaminen käytäntöön ei näyttänyt kovin mielekkäältä.

Abraham De Moivre tarkensi Huygensin ja Bernoullin tuloksia. Jos onnistumisen ja epäonnistumisen mahdollisuuksien suhde on $a : b = 1 : q$, niin yritysten määrä x, jossa ainakin yksi onnistuminen tapahtuu todennäköisemmin kuin nolla onnistumista, saadaan yhtälöstä

$$\left(1+\frac{1}{q}\right)^x = 2.$$

Kun q on suuri, $x \approx 0{,}7q$; kaksoiskuutosen tapauksessa $q = 35$ ja $x \approx 24{,}5$. De Moivre kehitteli binomitodennäköisyyden kaavaa arvioimalla bimomikertoimessa esiintyviä kertomatermejä. Symmetrisen binomijakauman tapauksessa hän päätyi tulokseen, jonka mukaan $\frac{n}{2}+t$:n onnistumisen todennäköisyys on noin

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{2t^2}{n}}.$$

Edellisen kaavan synnyttämä käyrä approksimoi binomijakaumaa. De Moivre totesi käyrällä olevan käännepisteen kohdissa $n \pm \frac{1}{2}\sqrt{n}$ ja että enintään $\frac{1}{2}\sqrt{n}$:n poikkeama keskeltä sattui todennäköisyydellä 0,682688. De Moivre ei käsitellyt perusteellisesti epäsymmetristä jakaumaa. Hän totesi kuitenkin, että Bernoullin tutkimassa tapauksessa 25550 yritystä voitiin supistaa 6498:aan. – Ns. todennäköisyyslaskennan *keskeinen raja-arvolause*, jonka mukaan lähes mielivaltaisten muuttujien summa jakautuu yhteenlaskettavien määrän kasvaessa normaalijakauman mukaisesti, tuli esiin Laplacen tuotannossa 1800-luvun alussa. Lauseen todistus riittävän väljin odotuksin esitettiin vasta 1900-luvun puolella.

Todennäköisyyslaskentaa ei juuri sovellettu muuhun käytännön toimintaan kuin uhkapeleihin. Bernoullin Ars Conjectandin neljännen osan otsikko lupasi sovelluksia yhteiskunnallisiin, moraalisiin ja taloudellisiin kysymyksiin, mutta sisälsi ”vain” suurten lukujen lain. 1700-luvulla tavanomaiset elinkorkojärjestelyt (A antaa B:lle tietyn rahasumman ja B maksaa A:lle tai tämän määräämälle vuosittain määräsumman) eivät perustuneet kuolleisuustaulujen mukaisiin todennäköisyyksiin eivätkä arpajaisten voittosummat olleet suhteessa voittojen todennäköisyyteen.

15.3 Tilastollinen päättely

Kysymystä siitä, missä määrin ilmiöstä tehdyistä havainnoista voidaan päätellä sen todennäköisyys, tutki vakavasti ensimmäisenä englantilainen pappismies *Thomas Bayes* (1702–61). Bayes otti käyttöön *ehdollisen todennäköisyyden* käsitteen ja johti kaavan

$$\frac{\displaystyle\int_a^b \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\,dx}{\displaystyle\int_0^1 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\,dx}$$

ilmaisemaan todennäköisyyttä, jolla toistokokeen onnistumistodennäköisyys on välillä $(a,\, b)$, jos tiedetään, että n:ssä toistossa on onnistuttu k kertaa. Bayesin tutkimukset ilmestyivät vasta tekijän kuoleman jälkeen.

Vaikka todennäköisyyspäättelyä ”seurauksista syihin” nykyään kutsutaan bayesiläiseksi, käänteistodennäköisyyksien varsinainen pioneeri oli Laplace. Laplace julkaisi 1774 tuloksen, joka kertoi havainnon k onnistumista n:stä ilmaisevan, että onnistumistodennäköisyys poikkeaa $\dfrac{k}{n}$:stä enintään c:n verran todennäköisyydellä

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{c/\sigma} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

missä

$$\sigma^2 = \frac{k(n-k)}{n^3}.$$

Laplace sovelsi tulosta käytäntöönkin. Pariisissa oli vuosien 1745 ja 1770 välillä syntynyt 251 527 poikaa ja 241 945 tyttöä. Laplace laski, että todennäköisyys, että poikien syntyminen olisi vähemmän todennäköistä kuin tyttöjen olisi $1{,}1521 \cdot 10^{-42}$, joten se, että poikia syntyy tyttöjä useammin, on moraalisesti varmaa.

Toinen kysymyksenasettelu, jossa tilastollinen aineisto vaati matemaattista käsittelyä, liittyi tähtitieteellisiin havaintoihin. Useiden havaintojen sovittaminen mekaniikan malleihin johti tilanteisiin, joissa muutaman tuntemattoman määrittämiseksi oli käytettävissä lukuisia ei aivan yhteensopivia yhtälöitä. 1700-luvulla esitettiin erilaisia ratkaisuja yhtälöt parhaiten toteuttavan likimääräisratkaisun määrittämiseksi. Adrien-Marie Legendre julkaisi 1805 komeetan radanmääritystä käsittelevän tutkielmansa liitteenä tarkastelun, jossa usean muuttujan lineaaristen lausekkeiden arvon tulisi olla nolla eri muuttujayhdistelmillä. Legendre perusteli tasapainosyillä ratkaisua, jossa yhtälöihin parhaiten sopivaksi muuttujayhdistelmäksi valitaan se, joka tekee lausekkeiden arvojen neliöiden summan mahdollisimman pieneksi. Tehtävä voitiin helposti ratkaista differentiaalilaskennan avulla.

Gauss julkaisi oman versionsa pienimmän neliösumman menetelmästä vuonna 1809. Gauss kertoi käyttäneensä menetelmää jo vuodesta 1795. Gauss johti menetelmän huomattavasti seikkaperäisemmin kuin Legendre. Gauss määritti ensin havaintovirheen Δ jakaumafunktion ϕ. Sen Gauss pystyi näyttämään olevan muotoa

$$\phi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}.$$

Johto perustui oletukseen, että havaintoarvojen keskiarvo on todennäköisimmin oikea arvo.

Normaalijakauman irrotti havaintovirheiden teoriasta yleisempiin yhteyksiin belgialainen *Adolphe Quételet* (1796–1874), alunperin tähtitieteilijä. Hän havaitsi normaalijakauman monenlaisissa ihmistä kuvaavissa tilastoissa. Erityisen sitova todistus normaalijakauman puolesta oli tilasto, jossa oli mitattu 5732 skotlantilaisen sotilaan rinnanympärys; ympärys jakautui normaalisti keskiarvona 40 tuumaa. Quételet otti käyttöön käsitteen *todennäköinen poikkeama*. Se tarkoitti sitä matkaa normaalijakauman asteikolla keskikohdan molemmin puolin, joka piti sisällään puolet tapauksista.

Englantilainen *Francis Galton* (1822–1911) pyrki käyttämään Quételet'n menetelmiä Darwinin periytymisopin todistamiseen. (Galton oli Darwinin serkku.) Erikokoisten herneiden jälkeläisten kokoa selvittäneet kokeet johtivat Galtonin *regression* ja *korrelaation* käsitteisiin. Galton päätteli korrelaation suuruuden pelkästään havaintopisteitä silmämääräisesti hyvin vastaavan suoran kulmakertoimesta.

Keskihajonnan käsitteen samoin kuin pienimmän neliösumman käytön korrelaatiokertoimen määrityksessä toi tilastotieteeseen vuonna 1893 englantilainen *Karl Pearson* (1871–1936). Pearsonilta ovat peräisin myös osittaiskorrelaatiokertoimet ja *random walk* -teoria. Pearson esitti myös (vuonna 1900) χ^2-testin, joka toi mukanaan yleisen ajatusmallin nollahypoteesista ja sen säilyttämisestä tai kumoamisesta tilastollisen aineiston avulla. Toisen laajalti käytetyn testin, pienten otosten keskiarvon jakaumaan perustuvan t-testin eli Studentin testin kehitti 1900-luvun alussa englantilainen *William Gosset* (1876–1937). Gosset joutui pohtimaan pienten otosten keskiarvon käyttäytymistä toimiessaan Guinnesin panimon kemistinä Dublinissa. On arveltu, että Pearson pakotti Gossetin julkaisemaan tuloksensa salanimellä *Student*, koskei halunnut, että hänen perustamassaan ja toimittamassaan *Biometrika*-aikakauskirjassa esiintyisi tekijä, jonka taustaorganisaatio on panimo.

16 Matematiikasta 1900-luvulla

Hiljattain päättynyt vuosisata (vuosiluvut ovat järjestyslukuja, joten vuosisata päättyi vuoden 2000 päättyessä) on tuottanut matematiikkaa ja merkittäviä matemaatikkoja saman verran kuin aikaisemmat vuosisadat yhteensä. Sinänsä tämä ei ole yllättävää, sillä tieteenharjoituksen määrän eksponentiaalinen kasvu merkitsee (todennäköisesti – varmaa laskelmaa ei taida olla helppo tehdä), että suurin osa kaikkina aikoina eläneistä matemaatikoista elää tällä hetkellä. Matematiikan soveltamisala ja soveltamistarpeet ovat myös valtavasti laajentuneet, samoin tieteenharjoittamisen tekniset ja taloudelliset mahdollisuudet. 1900-luvun matematiikan kattava käsittely on tässä – ja yleisemminkin – mahdotonta.

16.1 Poincaré

Vuosisadan vaihteen kaksi ilmeistä matematiikan voimahahmoa ovat ranskalainen *Henri Poincaré* (1854–1912) ja saksalainen *David Hilbert* (1862–1943).

Poincaré oli viimeisiä todellisia monipuolisuusmiehiä niin puhtaan kuin soveltavankin matematiikan alalla. Häntä pidetään viimeisenä universaalimatemaatikkona. Hän ei yleensä viihtynyt pitkään yhden asian parissa, vaan vaihtoi nopeasti tutkimusaiheitaan. Poincaré hankki École Polytechniquessa ja École des Mines -korkeakoulussa kaivosinsinöörin koulutuksen; professorina Sorbonnessa hän luennoi joka vuosi eri aiheista ja tuotti samalla kirjoja, myös kansantajuisia. Poincarén tieteellisten artikkelien lukumäärä on eri lähteiden mukaan 500:n ja 1500:n välissä.

Puhtaan matematiikan piirissä Poincarén kestävimpiä saavutuksia on 1800-luvun kaksijaksoisten elliptisten funktioiden tutkimuksen yleistävä *automorfifunktioiden teoria*, joka syntyi 1880-luvun alussa. Automorfifunktiot ovat kompleksimuuttujan funktioita f, joille pätee $f(z) = f(g(z))$ kaikille jonkin lineaarimuunnoksista

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

koostuvan ryhmän G jäsenille; ryhmän tulee olla luonteeltaan ns. epäjatkuva ryhmä. Poincaré nimesi ryhmät, joiden alkiot kuvaavat yksikkökiekon yksikkökiekkoon, Fuchsin ryhmiksi saksalaisen differentiaaliyhtälöiden tutkijan *Lazarus Fuchsin* (1833–1902) mukaan. Yleisempiä epäjatkuvia ryhmiä kutsutaan Kleinin ryhmiksi. Automorfifunktioilla on kytkentöjä mm. differentiaaliyhtälöihin, epäeuklidiseen geometriaan ja Riemannin pintoihin. Esimerkiksi jollain Riemannin pinnalla määritellyt algebralliset funktiot voidaan tulkita yksikkökiekon automorfifunktioiksi sopivan Fuchsin ryhmän suhteen. Poincaré ja Felix Klein kävivät ankaraa kilpailua automorfifunktioihin liittyvien ongelmien selvittämisessä; Klein ei lopulta kestänyt, vaan koki hermoromahduksen eikä enää koskaan kyennyt aivan täysitehoiseen luovaan työhön.

Poincaré on algebrallisen topologian perustajia ja merkittävä differentiaaliyhtälöiden tutkija. Laplacen tapaan hän teki tärkeitä töitä myös taivaanmekaniikassa, n:n kappaleen ongelman alalla, ja fysiikassa muutenkin. Poincarén eräät työt ennakoivat Einsteinin suhteellisuusteoriaa.

16.2 Hilbert ja 23 ongelmaa

Myös Hilbert oli erittäin monipuolinen matemaatikko. Hän aloitti akateemisen uransa syntymäkaupungissaan Königsbergissä. Vuodesta 1896 hän oli Göttingenin yliopiston matematiikan professori. Hilbertin ensimmäiset työt käsittelivät invarianttiteoriaa ja lukuteoriaa. Hilbertin antama epäkonstruktiivinen ratkaisu invarianttiteoreetikkoja koko 1800-luvun jälkipuoliskon askarruttaneeseen invarianttien kantaongelmaan sai alan johtavan tutkijan *Paul Gordanin* (1837–1912) huudahtamaan, että Hilbertin ratkaisu oli teologiaa, ei matematiikkaa. Lukuteoriaan Hilbertin johdatti *Deutsche Mathematikervereinigungin,* Saksan Matemaatikkoyhdistyksen tilaus kirjoittaa yleiskatsaus lukuteorian tilasta. Hilbertin vuonna 1894 julkaistu raportti kokosi yhteen ja yksinkertaisti edeltäjien tuloksia. Kuuluisa oli Hilbertin 1909 esittämä ratkaisu englantilaisen *Edward Waringin* (1734–98) asettamalle ongelmalle siitä, voidaanko kokonaisluku esittää n:nsien potenssien summina. Hilbertin panokseen geometrian aksiomatiikan alalla on edellä jo viitattu. Hilbertiltä on myös peräisin laajasti käytössä oleva tapa ottaa reaaliluvut käyttöön suoraan aksiomaattisesti, nojautumatta luonnollisiin lukuihin palautuviin konstruktioihin.

Vuoden 1900 Kansainvälisessä matemaatikkokongressissa Pariisissa Hilbert piti kuuluisan esitelmän, jossa hän arvioi matematiikan senhetkistä tilaa ja esitti luettelon 23 avoimesta kysymyksestä matematiikan eri aloilta. Näiden *Hilbertin probleemien* ratkaisu on työllistänyt ja jatkuvasti työllistää matemaatikkoja. Ongelmista ensimmäinen koski Cantorin kontinuumihypoteesia, toinen aritmetiikan aksioomajärjestelmän ristiriidattomuutta, kuudes fysiikan aksiomatisointia. Osa ongelmista koski melko spesifejä kysymyksiä, kuten lukujen $2^{\sqrt{2}}$ tai e^{π} mahdollista transkendenttisuutta tai irrationaalisuutta, osa oli jokseenkin yleisluontoisia, sellaisia, joihin yksikäsitteisen vastauksen antaminen ei ollut mahdollista. Ongelmat muodostuivat kuitenkin eräänlaiseksi matematiikan tavoiteluetteloksi, ja jonkin Hilbertin ongelman ratkaissut tai ratkaisun löytymiseen merkittävästi vaikuttanut matemaatikko on automaattisesti kohonnut maineeseen. Ensimmäinen ratkaisun saanut Hilbertin ongelma oli numero 3, jossa etsittiin todistusta sille, että mielivaltaista tetraedria ei voi jakaa äärelliseen määrään monitahokkaita, joista voi koota kuution. Ratkaisija oli Hilbertin oppilas *Max Dehn* (1878–1952). Dehnin ratkaisu on vuodelta 1901.

Jo mainittujen alojen lisäksi Hilbert tutki itse myös mm. integraaliyhtälöitä, matemaattista fysiikkaa ja matemaattista logiikkaa. Riemannin käyttämän Dirichlet'n periaatteenkin Hilbert täsmensi ja palautti sallittujen keinojen varastoon. Matematiikan filosofian alalla Hilbert edusti ns. *formalistista koulukuntaa.* – Hilbertin "viimeiset sanat" kollegoilleen, jotka esittivät epäilyjä matematiikan kyvystä selvitä perusteidensa ristiriitaisuuksista, ovat muodostuneet kannustavaksi lentäväksi lauseeksi: *Wir müssen wissen, wir werden wissen!*

16.3 Saksan matematiikasta 1900-luvulla

Göttingen oli muutenkin matematiikan keskus Saksassa ennen toista maailmansotaa. Hilbertin ohella siellä toimivat mm. Klein, tämän seuraaja *Richard Courant* (1888–1972) ja Hilbertin oppilas ja seuraaja *Hermann Weyl* (1885–1955). Courant kirjoitti ja julkaisi yhdessä Hilbertin kanssa 1924 teoksen *Methoden der mathematischen Physik*, jonka merkitys tuolloin syntyvaiheissaan olleelle kvanttimekaniikalle oli suuri. Erittäin monipuolinen Weyl julkaisi 1912 Riemannin pintojen aksiomaattisen määritelmän. Hänen merkityksensä on suuri myös *Albert Einsteinin* (1879–1955) yleisen suhteellisuusteorian kehittäjänä. Myös Hilbert oli mukana yleiseen suhteellisuusteoriaan johtaneessa prosessissa. Einsteinin asemaa teorian luojana ei ole mitään syytä asettaa kyseenalaiseksi.

Kansallissosialismin valtaantulolla vuonna 1933 oli globaaleja vaikutuksia matematiikan kehitykselle. Suuri joukko juutalaisia ja toisinajattelevia matemaatikkoja siirtyi pois Saksasta, etupäässä Yhdysvaltoihin. Näin tekivät myös Courant, Weyl ja Einstein ja Göttingenissä toiminut ehkä kaikkien aikojen merkittävin naispuolinen matemaatikko, algebrikko *Emmy Noether* (1882–1935). Tämän tiedemiesten joukkosiirtymisen ansiota on paljolti se johtoasema, jonka Yhdysvallat on matematiikan määrässä ja laadussa saavuttanut kuluneen vuosisadan jälkipuoliskolla.

Saksassa yritettiin 1930-luvulla todistella, että on olemassa hyvää arjalaista ja huonoa seemiläistä matematiikkaa. Tällaisia ajatuksia esittivät eräät sinänsä pätevätkin matemaatikot, mm. monista oppikirjoistaan ja yli puoli vuosisataa ratkaisematta olleesta funktioteoreettisesta konjektuuristaan tunnettu *Ludwig Bieberbach* (1886–1982). (Bieberbachin vuonna 1916 esittämä olettamus oli, että yksikkökiekossa $|z| < 1$ analyyttisen injektion f, jolle $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$, potenssisarjakehitelmän

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

jokaisen kertoimen a_k itseisarvo on enintään k. Hypoteesia todistettiin kerroin kerrallaan, ja vuonna 1973 tiedettiin jo, että $|a_8| \leq 8$. Amerikkalainen *Louis de Branges* todisti hypoteesin vuonna 1984.)

16.4 Topologia

Topologia, karkeasti ottaen oppi sellaisista kuvioiden ominaisuuksista, jotka säilyvät erilaisissa jatkuvissa muunnoksissa, kytkeytyy nykyisin hyvin suureen osaan matematiikkaa. Sen katsotaan saaneen alkunsa milloin Eulerin esittämästä Königsbergin siltaprobleeman ratkaisusta, milloin Riemannin väitöskirjasta, milloin Cantorin joukko-opin ja topologian välimaastossa kulkevista töistä. Termiä topologia käytti ensi kerran Gaussin oppilas *Johann Benedikt Listing* (1806–82) vuonna 1847. Listing perusteli termin *Topologie* käyttöä termin *Geometrie der Lage* (joka on käännös myös topologiaa tarkoittaneesta latinankielisestä termistä *analysis situs*) sijasta sillä, että jälkimmäisellä oli merkitys 'projektiivinen geometria'. Listingin ohella kuvioiden ja kappaleiden topologisia perusominaisuuksia käsitteli toinen Gaussin oppilas *Augustus Ferdinand Möbius* (1790–1868). Möbiukselta on peräisin hedelmällinen *triangulaation* idea: monitahokkaan topologiset ominaisuudet heijastuvat tavoista, joilla se on jaettavissa kolmioiksi.

Pistejoukkojen topologian peruskäsitteet *avoin* ja *suljettu joukko* esiintyvät ensi kerran Cantorilla. Niiden taustalla on suppenemisen käsite. Ensimmäinen systemaattinen topologian esitys oli Poincarén vuonna 1895 julkaisema teos *Analysis situs*. Poincaré oli kiinnostunut topologian kombinatoris-algebrallisesta puolesta. Hänen tärkeimpänä herätteenään oli tarve selvittää kompleksimuuttujien yhtälöön $f(x, y, z) = 0$ liittyvän (reaalisesti) neliulotteisen pinnan olemusta. Poincare selvitteli yleisten n-ulotteisten monistojen teoriaa, määritteli näille erilaisia mm. yhtenäisyyttä kuvaavia tunnuslukuja sekä esitti moniston perusryhmän eli homotopiaryhmän käsitteen. Kuuluisaksi tuli *Poincarén hypoteesina* tunnettu otaksuma, jonka mukaan tiettyjä n-ulotteisen pallon ominaisuuksia omaava monisto onkin n-ulotteinen pallo. Yllättävää kyllä hypoteesi onnistuttiin todistamaan arvoilla $n > 3$, mutta kolmiulotteisen pallon tapaus pysyi avoimena aina vuoteen 2003, jolloin venäläinen *Grigori Perelman* (1966–) esitti hyväksyttävän todistuksen.

Pistejoukkojen topologian perustajana voidaan pitää saksalaista *Felix Hausdorffia* (1868–1942). Hänen 1914 ilmestynyt teoksensa *Grundzüge der Mengenlehre* sisältää abstraktin topologisen avaruuden aksiomaattisen määrittelyn ympäristökäsitteen avulla. Topologian alkuaikojen merkittäviä pioneereja on myös hollantilainen *L. E. (Luitzen Egbertus) Brouwer* (1881–1966), joka todisti v. 1911 keskeisen avoimien joukkojen invarianssilauseen: eriulotteisissa avaruuksissa sijaitsevien avoimien joukkojen välinen homeomorfismi, kääntäen yksikäsitteinen jatkuva kuvaus, on mahdoton. Brouwer otti käyttöön *simpleksit*, kolmion n-ulotteiset yleistykset.

16.5 Reaali- ja funktionaalianalyysi

Cantorin joukko-oppi johti uusiin *mitallisuutta* ja integrointia koskeviin teorioihin. Alan pioneereja olivat ranskalaiset *Emile Borel* (1871–1956) (poliittisestikin orientoitunut matemaatikko; hän oli kansanedustaja ja toimi 1920-luvulla jonkin aikaa laivastoministerinä) ja *Henri Lebesgue* (1875–1941). Borel rajoitti mitallisuuden kannalta käsiteltävät pistejoukot (reaaliakselilla) numeroituvilla prosesseilla väleistä kokoonpantaviin joukkoihin, *Borelin joukkoihin*, ja Lebesgue laajensi 1902 ilmestyneessä väitöskirjassaan merkittävästi Riemannin integraalikäsitettä: hänen keskeinen oivalluksensa oli, että integraalia määriteltäessä funktion määrittelyjoukon jaon sijasta oli kannattavampaa tarkastella maalijoukon jakoja. Tällöin voidaan integraali määritellä helposti ja mielekkäästi varsin vähän säännöllisyyttä omaavillekin funktioille, vaikkapa Dirichlet'n kaikkialla epäjatkuvalle funktiolle. Toisaalta on tarpeen yleistää pituuden, pinta-alan tai tilavuuden käsite koskemaan geometriselta kannalta epäsäännöllisiäkin joukkoja. Lebesguen määrittelemä mitta toimii laajemmalle kokoelmalle joukkoja kuin Borelin mitta.

Niin joukko-oppi, topologia kuin mittateoriakin näyttelevät osaa *funktionaalianalyysissa*. Funktionaalianalyysin lähtökohtana olivat toisaalta pyrkimykset ratkaista variaatiolaskennan ja Dirichlet'n ongelman yhteydessä syntyviä *integraaliyhtälöitä*, toisaalta pyrkimykset yleistää analyysin käsitteistö joukko-opin ja topologian luomiin abstrakteihin avaruuksiin. Sanalla *funktionaali* ymmärretään funktiota, jonka arvot ovat lukuja, mutta argumentit funktioita. Muunnosta, joka liittää funktioon funktion, kutsutaan usein *operaattoriksi*.

Integraaliyhtälöiden tutkijoista on mainittava italialainen *Vito Volterra* (1860–1940) ja ruotsalainen *Ivar Fredholm* (1866–1927). Yhtälöt, joita he pyrkivät ratkaisemaan, olivat tyyppiä

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t)\,dt,$$

missä f ja K ovat tunnettuja, u tuntematon funktio. Volterra esitti yhtälöille iteratiivisia ratkaisuja ja Fredholm approksimoi yhtälöä suurella lineaarisella yhtälöryhmällä. Ensimmäisiä "ääretönulotteisten" menetelmien käyttäjiä integraaliyhtälöissä oli Hilbert, jonka kiinnostus aiheeseen syntyi, kun ruotsalainen *Erik Holmgren* esitelmöi Fredholmin tutkimuksista Göttingenissä v. 1900. Hän ei kuitenkaan itse määritellyt euklidisen avaruuden lähintä ääretönulotteista vastinetta, täydellistä sisätulolla varustettua numeroituvan kannan omaavaa lineaariavaruutta eli *Hilbertin avaruutta* (vaan joutui kertoman mukaan jopa vanhoilla päivillään utelemaan kollegaltaan Hermann Weyliltä, mitä kyseinen monien käyttämä sana oikein tarkoitti). Hilbertin avaruuden aksiomaattisen määritelmän esitti 1930 unkarilais-amerikkalainen *Johann (John) von Neumann* (1903–57).

Abstraktien funktioavaruuksien tutkimuksen alkua merkitsevät *Maurice Fréchet'n* (1878–1973) työt. Fréchet yleisti vuonna 1906 ilmestyneessä väitöskirjassaan monet analyysin käsitteet kuten raja-arvon ja jatkuvuuden yleisiin avaruuksiin. Erikoistapaus abstrakteista avaruuksista oli *metrinen avaruus*, jonka määritelmä on myös Fréchet'n.

Merkittävä funktionaalianalyysiä yhtenäistävä ja kodifioiva tapaus oli puolalaisen *Stefan Banachin* (1892–1945) teoksen *Théorie des opérations lineaires* ilmestyminen vuonna 1932. Kirjassa määritellään eräs funktionaalianalyysin keskeisimpiä struktuureja, täydellinen normilla varustettu lineaariavaruus eli *Banachin avaruus* ja esitetään tällaisen avaruuden perusominaisuudet.

16.6 Todennäköisyyslaskenta

Todennäköisyyslaskenta lakkasi 1900-luvun alkupuolella olemasta ensi sijassa "uhkapelioppia" ja kehittyi keskeiseksi matematiikan osa-alueeksi; sen soveltamisaloihin liittyivät vakuutustoimen ja havaintovirheiden arvioinnin lisäksi mm. statistinen mekaniikka, jonka perustajia on edellä mainittu Gibbs, ja genetiikka sekä muut biotieteet.

Myös todennäköisyyslaskennassa tuntuivat joukko-opin ja mittateorian vaikutukset. Borel täsmällisti todennäköisyyden käsitettä 1909 julkaisemassaan oppikirjassa, mutta vasta neuvostoliittolainen *Andrei Nikolajevitš Kolmogorov* (1903–87) vuonna 1933 varsinaisesti aksiomatisoi todennäköisyyslaskennan ja osoitti, että se on itse asiassa osa mittateoriaa. Kolmogorov oli häkellyttävän tuottelias ja monipuolinen myös popularisoijana. Toisen merkittävän venäläisen probabilistin *Andrei Andrejevitš Markovin* (1856–1922) vuosina 1906–07 julkaistut todennäköisyysketjuja, ns. *Markovin ketjuja*, koskevat työt panivat alulle *stokastisten prosessien* tutkimuksen. Markovin ketjut kuvaavat systeemejä, joilla on joukko mahdollisia tiloja, ja satunnaistapahtumia, jotka merkitsevät systeemin siirtymistä tilasta toiseen. Siirtymistodennäköisyydet riippuvat vain systeemin tilasta, ei systeemin aiemmasta historiasta. – Markov teki myös merkittävää työtä lukuteorian alalla. Jostain syystä siihen viitatessa hänen nimestään käytetään muotoa *Markoff*.

16.7 Yhtenäistämispyrkimyksiä

Matematiikka on nykyään eriytynyt tavattoman moniksi eri osa-alueiksi. Pääaloja on kuutisenkymmentä, ja jokainen jakautuu vielä pienempiin osiin. Vastapainoksi tälle eriytymiselle pyrittiin 1900-luvulla luomaan myös synteesejä. Tällainen pyrkimys oli jo Peanolla 1800-luvun lopulla samoin kuin Saksassa vuosina 1898–1921 ilmestyneen laajan *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* -teoksen toimittajilla.

Suurisuuntaisin synteesiyritys on kuitenkin nimimerkillä *Nicolas Bourbaki* kirjoittaneella ranskalaisella kollektiivilla, jonka huomattavia jäseniä ovat olleet mm. *André Weil* (1906–98) ja *Jean Dieudonné* (1906–92). Bourbaki-ryhmä syntyi v. 1935; nimensä se sai Krimin sodan aikaisesta kenraalista, jonka nimissä oli kerran pilailtu *École Normalessa*. Bourbakin kymmenosainen teossarja *Éléments de mathématique*, pyrkii esittämään kaikki matematiikan tärkeät osa-alueet yhtenäisessä aksiomaattis-loogisessa rakennelmassa. Bourbakin vaikutus näkyy suomalaisessakin termistössä ja merkintäkäytännöissä: mm. käsitteet *bijektio* ja *surjektio*, lukualueiden merkinnät $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$, implikaationuoli $\Rightarrow$ sekä tyhjän joukon symboli $\emptyset$ ovat *bourbakismeja*. – Bourbaki-ryhmän toimintaan liittyi myös *Séminaire Bourbaki*, joka on toiminut Pariisissa vuodesta 1948 ajankohtaisen matematiikan esittelyfoorumina.

17 Matematiikkaa Suomessa

Suomi oli pitkään – ja on tietysti yhä – matematiikan periferiaa. Matemaattiset innovaatiot tulivat tänne useiden vuosikymmenien viipeellä. Matematiikan yleishistorioista ja yleishakuteoksista saa suomalaisia nimiä etsiä lähes turhaan. Eräillä matematiikan osa-alueilla suomalainen matematiikka on kuitenkin ajoittain ollut ehdotonta maailmankärkeä.

17.1 Varhaisvaiheet

Korkeamman opetuksen ja tieteenharjoituksen katsotaan Suomessa alkavan *Turun akatemian* perustamisesta vuonna 1640. Akatemian vähälukuiseen opettajakuntaan määrättiin kuuluvaksi myös matematiikan professori. Professuurin opetusalaan, joka määriteltiin sanalla *mathesis*, kuului myös tähtitiede. Tämä professuuri oli yli 200 vuoden ajan ainoa varsinaisesti matemaattinen tehtävä Suomessa.

Turun akatemian ensimmäinen matematiikan professori oli ruotsalaissyntyinen, Upsalassa opiskellut *Simon Kexlerus* (1602–69). Kexleruksen, samoin kuin hänen seuraajiensakin, edustaman tietämyksen ja opetuksen taso oli melko alhainen. Kexlerus esimerkiksi omisti paljon vaivaa ptolemaiolaisen maailmankuvan puolustamiseen kopernikaanista vastaan. Uuden ajan alkuvuosisatojen merkittävistä uusista keksinnöistä ei Suomessa tunnuttu vielä tiedettävän mitään. Opetus rajoittui seksagesimaali- ja kymmenjärjestelmän aritmetiikkaan sekä trigonometrian ja geometrian alkeisiin. Infinitesimaalilaskenta alkoi tehdä tuloaan Suomeen vasta 1700-luvun puolivälissä, yli 50 vuotta syntyaikojensa jälkeen.

1700-luvun turkulaismatemaatikoista voi mainita *Martin Johan Walleniuksen* (1731–73), joka 1766 julkaisi täydellisen todistuksen Hippokrateen kuunsirppiongelman yleistykselle säännöllisen monikulmion sivuihin liittyvien ympyränkaarien tapauksessa. Hippokrateen tapainen sirppien neliöinti onnistuu tasan viidessä eri tapauksessa. Wallenius pani myös alulle differentiaali- ja integraalilaskennan opetuksen Turussa.

Ensimmäinen eurooppalaiselle tasolle päässyt suomalainen matemaatikko oli Turussa syntynyt, Walleniuksen aikana opiskellut ja dosentiksi tullut *Anders Lexell* (1740–84), joka kuitenkin toimi melkein yksinomaan Pietarissa, aluksi sokean Eulerin assistenttina ja puhtaaksikirjoittajana. Kun Euler kuoli 1783, Lexell nimitettiin itse akateemikoksi, mutta hänkin kuoli pian. Lexell suoritti merkittäviä tähtitieteellisiä laskuja ja tutki differentiaaliyhtälöitä. Lexell totesi samaan aikaan kuin Laplace, että englantilaisen *Willian Herschelin* vuonna 1781 löytämä ja alkuaan komeetaksi tulkitsema taivaankappale oli planeetta Uranus. Lexell piti hallussaan matematiikan professuuria Turussa muutaman vuoden. Lexell oli kuitenkin koko ajan virkavapaana ja toimi edelleen Pietarissa. Matemaattista jälkikasvua Lexelliltä ei Suomeen jäänyt.

Turun akatemia siirtyi Turun palon jälkeen vuonna 1828 Helsinkiin ja muuttui samalla *Keisarilliseksi Aleksanterin-yliopistoksi*. Vähittäinen kehitys kohti Manner-Euroopan tieteen tasoa alkoi. Ensimmäinen Helsingissä toiminut matematiikan professori *Nathanaël af Schultén* (1794–1860) oli sen eturintamasta vielä varsin kaukana. Hänen tuotannossaan vilahtelee kuitenkin selvästi ajankohtaisia aiheita: interpolointi trigonometristen funktioiden avulla suunnilleen Fourier'n aikoihin, irrationaalilukujen olemus, ketjumurtoluvut ja differentiaalilaskennan perusteet.

Schulténia seurasi matematiikan oppituolissa *Lorenz Lindelöf* (1827–1908). Lindelöf oli merkittävä variaatiolaskennan tutkija; vaikka hän ei tällä alalla mitään vallankumouksellista uutta luonutkaan, oli hänen 1861 Pariisissa julkaistu ranskankielinen variaatiolaskennan oppikirjansa *Leçons de calcul des variations* laajalti käytössä. – Lindelöf oli kiinnostunut yhteiskunnallisista asioista. Hän siirtyi 1874 professuuristaan Kouluylihallituksen johtajaksi (ja jäi eläkkeelle vasta 1902), ehti olla säätyvaltiopäivillä niin pappis-, porvaris- kuin aatelissäätyjenkin edustajana ja oli joitakin vuosia Helsingin kaupunginvaltuuston puheenjohtajana. Professorivuosinaan Lindelöf toimi myös yliopiston rehtorina.

17.2 Kansainväliset yhteydet avautuvat

Vuonna 1877 Lorenz Lindelöfiä seurasi matematiikan professuurissa kiivaan kieliriidan jälkeen ruotsinmaalainen *Gösta Mittag-Leffler* (1846–1927), Weierstrassin oppilas. Hänen kilpahakijansa oli *Ernst Bonsdorff* (1842–1936), etevä invarianttiteorian tutkija. Mittag-Leffler oli huomattava funktioteorian tutkija ja myöhemmin, Ruotsissa toimiessaan, matematiikan kansainvälisen tieteellisen yhteistoiminnan keskeisiä organisoijia. – Mittag-Lefflerin Tukholman liepeillä sijaitseva koti on nykyisin matemaattinen tutkimuslaitos, *Institut Mittag-Leffler*; tutkimuslaitoksen pohjana oleva suuri omaisuus on huomattavalta osalta peräisin Suomesta, Mittag-Lefflerin suomalaisen vaimon *Signe Lindforsin* perinnöstä.

Mittag-Leffler aloitti Suomessa *funktioteoreettisen tutkimussuunnan*, joka on historiallisesti merkittävin suomalaisen matematiikan panos matematiikan yleiseen kehitykseen. Mittag-Leffler ehti nelivuotisen Helsingin-kautensa aikana kouluttaa muutamia oppilaita, joista ensimmäinen on *Hjalmar Mellin* (1854–1933). Myös Mellin opiskeli jonkin aikaa Weierstrassin johdolla Berliinissä. Gammafunktiota ja hypergeometrista funktiota tutkiessaan hän johtui integraalimuunnokseen

$$F(z) = \int_0^\infty \Phi(x)x^{z-1}dx$$

käänteismuunnoksineen. Tämä muunnos tunnetaan kansainvälisesti *Mellinin transformaationa*. – Vanhemmilla päivillään Mellin otti päätehtäväkseen Einsteinin suhteellisuusteorian vastustamisen: hän kirjoitti useita artikkeleita, joissa suhteellisuusteoriaa pyrittiin kumoamaan terveen järjen perusteluin.

Mittag-Lefflerin seuraaja matematiikan professuurissa oli *Edvard Neovius* (1851–1917), Suomen merkittävimmän matemaattisen suvun *Neovius-Nevanlinnan* edustaja. Neovius oli opiskellut Zürichin teknillisessä korkeakoulussa ETH:ssa Weierstrassin oppilaan ja työtoverin *Hermann Amandus Schwarzin* (1843–1921) johdolla; Schwarz tunnetaan funktioteorian *Schwarzin lemmasta* ja *Schwarzin epäyhtälöstä*, joka kuitenkin on peräisin Cauchylta. Neovius tutki projektiivista geometriaa ja Riemannin ja Weierstrassin alulle panemaa *minimipintojen teoriaa*, eli kysymyksiä kiinteän avaruuskäyrän reunustamista pinta-alaltaan mahdollisimman pienistä pinnoista. Yliopistosta Neovius siirtyi vuonna 1900 maan hallitukseen eli senaattoriksi. Neovius edusti Venäjään nähden maltillista myöntyväisyyslinjaa, mikä johti siihen, että hän joutui vuoden 1905 tapahtumien jälkeen vetäytymään syrjään politiikasta. Viimeiset elinvuotensa hän vietti vaimonsa kotimaassa Tanskassa.

Neovius oli osaltaan vaikuttamassa Suomen korkeamman tekniikanopetuksen aseman vakiinnuttamiseen 1800-luvun lopulla. Vuonna 1849 perustettu *Teknillinen reaalikoulu* muutettiin 1879 *Polyteknilliseksi opistoksi* ja 1908 *Teknilliseksi korkeakouluksi*. Korkeakoulun ensimmäinen matematiikan professori oli Mellin.

17.3 Ernst Lindelöf ja hänen oppilaansa

Suomalainen funktioteoreettinen koulukunta sai varsinaisesti hahmonsa Lorenz Lindelöfin pojan *Ernst Lindelöfin* (1870–1946) pitkäaikaisen opettajan- ja tutkijantyön ansiosta. Ernst Lindelöf oli Helsingin yliopiston matematiikan professori 1903–1938. Lindelöfin pääyhteydet kohdistuivat Ranskaan, ja myös suurin osa hänen tutkimuksistaan on kirjoitettu ranskaksi. Isänsä tavoin hänkin julkaisi Ranskassa arvostetun oppikirjan, jonka aiheena oli Cauchyn alulle panema *residylaskenta* eli kompleksisten viivaintegraalien ja Cauchyn integraalilauseen hyödyntäminen reaalisten funktioiden integroinnissa. Funktioteoriassa Lindelöf tutki mm. kokonaisia (so. ei napoja eli äärettömyyskohtia omaavia) analyyttisia funktioita, residylaskentaa ja konformikuvausten teoriaa. Kokonaisia funktioita koskevat työt ennakoivat *arvojenjakautumisteorian* tuloa Suomeen. Tunnettu on Lindelöfin yhteistyö ruotsalaisen *Edvard Phragménin* (1863–1937) kanssa. *Phragménin–Lindelöfin lause* koskee analyyttisen funktion käyttäytymistä äärettömyyteen ulottuvan sektorin muotoisessa alueessa.

Lindelöfin kiinnostus suuntautui myös muihin matematiikan aloihin. Hän toi lisiä differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen olemassaolotuloksiin ja pistejoukkojen topologiassa todisti tunnetulle *Heinen–Borelin lauseelle* sukua olevan *Lindelöfin peitelauseen*. Myöhempinä vuosinaan Lindelöf keskittyi opetukseen ja kirjoitti mm. merkittävät oppikirjat *Johdatus korkeampaan analyysiin* ja *Differentiaali- ja integraalilasku ja sen sovellutukset I – IV*. Jälkimmäisen teoksen neljäs osa on omistettu variaatiolaskennalle, kunnianosoitukseksi isä-Lindelöfin harrastuksille.

Etupäässä funktioteorian alalla toimineita Ernst Lindelöfin työtovereita ja oppilaita ovat mm. *Severin Johansson* (1879–1929), *Felix Iversen* (1887–1973), *Pekka Myrberg* (1892–1976) sekä veljekset *Rolf Nevanlinna* (1895–1980) ja *Frithiof Nevanlinna* (1894–1977).

Severin Johansson oli vuonna 1918 perustetun *Åbo akademin* ensimmäinen matematiikan professori ja sen toinen rehtori. Johansson pani alulle automorfifunktioiden tutkimuksen Suomessa. (Ernst Lindelöfin mielestä automorfifunktiot olivat niin vaikeita, että hän ei uskaltanut niihin puuttua.) Felix Iversenin alaa olivat meromorfifunktioiden singulariteetit; hän tuli tunnetuksi myös filantrooppina ja pasifistina sekä 40-vuotisesta toiminnastaan ylioppilastutkintolautakunnan sihteerinä. Pekka Juhana Myrberg oli kansainvälisesti arvostettu automorfifunktioiden tutkija, Teknillisen korkeakoulun ja Helsingin yliopiston professori ja lopulta Helsingin yliopiston kansleri. – Kuuluisaksi tuli Myrbergin osallistuminen saksalaisen Jablonowski-seuran kilpailuun 1922: kilpailutehtävänä tutkia algebrallisen yhteenlaskuteoreeman (kuten $f(x+y) = f(x) + f(y)$) toteuttavia funktioita, ja kilpailuaikaa oli neljä vuotta. Myrberg sai tiedon kilpailusta viimeisen kilpailuvuoden kuluessa, kirjoitti tutkimuksen ja voitti kilpailun. Myrbergin vanhemmilla päivillään kirjoittamat rationaalifunktioiden iterointia koskeneet tutkimukset ovat osoittautuneet aikaansa edellä olleiksi: mm. viimeaikaisen fraktaalitutkimuksen yhteydessä on tullut uudelleen esiin Myrbergin tutkimia ongelmia.

Kaikki Lindelöfin oppilaat ja työtoverit eivät olleet funktioteoreetikkoja. Monipuolinen ja itsenäinen *Jarl Lindeberg* (1876–1932) tutki mm. potentiaaliteoriaa, variaatiolaskentaa, todennäköisyyslaskentaa ja matemaattista tilastotiedettä. Lindebergin todistus todennäköisyyslaskennan keskeiselle raja-arvolauseelle (jonka mukaan lähes mielivaltaisesti jakautuneiden satunnaismuuttujien summa noudattaa likimain normaalijakaumaa, kun yhteenlaskettavia on paljon) on kuuluisa. *Nils Pipping* (1890–1982), Severin Johanssonin seuraaja Åbo akademissa, tutki lukuteoriaa ja *Kalle Väisälä* (1893–1968), Turun yliopiston ensimmäinen matematiikan professori ja sittemmin pitkään vastaavan viran haltija Teknillisessä korkeakoulussa, algebraa ja algebrallista lukuteoriaa. Turkuun onkin aikaa myöten kehittynyt huomattava algebrallis-lukuteoreettinen koulukunta, jonka merkittävä edustaja on mm. *Kustaa Inkeri* (1908–1997). Inkeri teki huomattavia töitä Fermat'n suuren lauseen alalla. Turun matematiikka on tästä edelleen kehittynyt mm. automaattien teorian ja koodausteorian suuntaan. Seuraavan Turun-sukupolven merkittävin edustaja on *Arto Salomaa* (1934 –), kansainvälisesti arvostettu automaattien teorian tutkija. – Kalle Väisälän merkitys matematiikan kouluopetuksen kehittäjänä on huomattava. Hänen oppikirjansa olivat 1950- ja 60-luvuilla oppikoulun vakio-oppimateriaalia. Väisälä paneutui oppikirjantekoon tunnollisesti. Hän rupesi sivutoimiseksi koulunopettajaksi ja testasi materiaalinsa ensin omassa käytössään.

Lindelöfin piirissä toimi myös yksi kansainvälisesti arvostetuimpia suomalaisia tutkijoita, Kaskisissa syntynyt tähtitieteilijä *Karl Frithiof Sundman* (1873–1949). Sundman ratkaisi Poincaréllekin ylivoimaiseksi osoittautuneen *kolmen kappaleen ongelman* 1900-luvun ensimmäisellä vuosikymmenellä.

17.4 Rolf Nevanlinna ja arvojenjakautumisteoria

Neovius-Nevanlinnan suvussa on poikkeuksellisen paljon matemaatikkoja. Rolf Nevanlinnan isoisä oli Haminan kadettikoulun matematiikan opettaja, sittemmin kenraalimajuri *Edvard Engelbert Neovius* (1823–88), Rolf ja Frithiof Nevanlinnan isä *Otto Nevanlinna* (1867–1927) normaalilyseon matematiikan yliopettaja, setä Edvard Rudolf Neovius matematiikan professori ja toinen setä *Lars Neovius-Nevanlinna* (1850–1916) opettaja ja matematiikan oppikirjojen tekijä. Frithiof Nevanlinnan poika *Veikko Nevanlinna* (1920–) on Jyväskylän yliopiston matematiikan emeritusprofessori, Oulun yliopiston matematiikan emeritusprofessori *Heikki Haahti* (1929–) on Rolfin ja Frithiofin sisarenpoika ja Teknillisen korkeakoulun matematiikan professori *Olavi Nevanlinna* (1948–) Frithiofin pojanpoika.

Rolf Nevanlinnaa pidetään yleisesti merkittävimpänä suomalaisena matemaatikkona. Nevanlinnan maine perustuu ennen muuta 1925 syntyneeseen meromorfifunktioiden yleiseen arvojenjakautumisoppiin. (Kompleksimuuttujan z funktio f on *analyyttinen* eli *holomor-*

finen, jos se on jokaisessa määrittelypisteessään derivoituva. Tällöin se voidaan jokaisessa määrittelyjoukon pisteessä kehittää Taylorin sarjaksi. Jos määrittelyjoukko vielä on koko kompleksitaso, funktiota sanotaan *kokonaiseksi*. Funktio on *meromorfinen*, jos sen saamien arvojen joukkoon sallitaan ∞, mutta jos sillä kuitenkin jokaisessa määrittelyjoukon pisteessä on Laurent-sarja, joka on muotoa

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z - z_0)^k.$$

Tämä voidaan ilmaista myös sanomalla, että funktion erikoispisteet ovat enintään n:nnen kertaluvun *napoja*.) Arvojenjakautumisteorian lähtökohtana oli ranskalaisen *Emile Picardin* (1856–1941) jo vuonna 1879 todistama tulos, jonka mukaan koko kompleksitasossa määritelty kokonainen analyyttinen funktio saa enintään yhtä poikkeusta lukuun ottamatta kaikki kompleksilukuarvot. Tällainen poikkeusarvo voi kuitenkin esiintyä: esim. e^z ei missään ole 0.

Picardin tulosta oli parantanut mm. Borel, mutta Nevanlinnan 1920-luvun puolivälissä julkaisemat tutkimukset, jotka koskivat paljon laajempaa yleisten meromorfisten funktioiden luokkaa, laajensivat teorian kokonaan uudelle tasolle. Nevanlinnan tulokset tunnetaan *Nevanlinnan teorian* ensimmäisenä ja toisena päälauseena. Niiden olennainen sisältö on, että meromorfifunktio saa kaikki arvot suunnilleen yhtä monesti. Jos jokin arvo esiintyy muita harvemmin funktion arvojen joukossa, niin funktio tulee toisaalta lähelle tällaista arvoa "useammin" kuin muita. Nevanlinnan vuonna 1936 julkaisema monografia *Eindeutige analytische Funktionen* on arvojenjakautumisteorian perusteos. – Arvojenjakautumisteoria on osaksi Nevanlinnan veljesten yhteistyötä. Siitä on tullut yksi kompleksianalyysin kestäviä tutkimuskohteita. Yleistyksiä on tehty eri suuntiin.

Rolf Nevanlinna oli aktiivinen monilla matematiikan aloilla; näihin kuuluvat Riemannin pintojen teoria, funktionaalianalyysi ja geometrian aksiomatiikka. Myös Nevanlinna ehti sotavuosina toimia yliopiston rehtorina. Nevanlinna oli osittain sukulaisuussuhteidenkin takia melko voimakkaasti Saksaan suuntautunut. Sodan aikana hän oli tekemisissä suomalaisen SS-pataljoonan kanssa. Sodan jälkeen hän ei ymmärrettävästi voinut toimia yliopiston hallinnossa. Kun ns. vanha Suomen Akatemia perustettiin 1948, Nevanlinnasta tuli sen ensimmäinen (ja ainoa) matemaatikkojäsen. Nevanlinna hoiti pitkään osa-aikaista professuuria Zürichin yliopistossa. Tästä yhteistyöstä juurtavat alkunsa edelleen säännöllisin väliajoin suomalais-sveitsiläisin voimin järjestettävät *Rolf Nevanlinna -kollokviot*. Frithiof Nevanlinna teki elämäntyönsä pääosan vakuutusjohtajana. Hän ehti kuitenkin olla muutaman vuoden Helsingin yliopiston matematiikan professorina 1950-luvulla.

17.5 Funktioteoriaa Nevanlinnan jälkeen

Suomen Akatemian perustaminen sodan jälkeisissä oloissa oli mitä suurimmassa määrin silloisen maisteri *Leo Sarion* (1916–) tarmokkuuden ansiota. Sario oli myös Nevanlinnan oppilas. Hän toimi pitkään professorina Kalifornian yliopistossa ja tutki Riemannin pintojen teoriaa. Rolf Nevanlinnalla puolestaan oli aktiivinen rooli 1960-luvun puolivälissä, kun vanhan Suomen Akatemian toiminta lakkasi samalla kun nykyinen keskusvirastotyyppinen Suomen Akatemia perustettiin.

Rolf Nevanlinnan monista oppilaista ensimmäinen ajallisesti ja asiallisesti on *Lars V. Ahlfors* (1907–1996), monipuolinen kompleksianalyysin tutkija ja ainoa suomalainen Fieldsin mitalin saaja; suurimman osan elämäntyöstään Ahlfors teki ulkomailla. Sodan jälkeen hän siirtyi ensin Zürichiin ja vuodesta 1946 alkaen hän oli Harvardin yliopiston professori. Ahlfors saavutti huomiota varsin nuorena ratkaistuaan ällistyttävän nopeasti ranskalaisen *Arnaud Denjoyn* (1884–1974) jo huomattavasti aikaisemmin esittämän ongelman. Myöhemmin Ahlfors kehitti Nevanlinnan arvojenjakautumisteoriasta geometrisemman version, *peitepintojen teorian*, ja oli ensimmäinen saksalaisen *Oswald Teichmüllerin* (1913–43?) Riemannin pintojen luokitteluun kohdistuneiden tutkimusten arvon ymmärtäjiä ja niiden tulkitsijoita. Näin Ahlforsista tuli sittemmin Suomessakin menestyksellisesti harjoitetun *kvasikonformikuvausten teorian* perustajia. Kvasikonformikuvaukset yleistävät konformikuvauksia: kun konformikuvaus säilyttää lokaalisti kulmat ja pituussuhteet, kvasikonformikuvaus sallii erilaisen venytyksen eri suuntiin, kuitenkin niin, että pienten ympyröiden kuvaellipsien eksentrisyys säilyy rajoitettuna.

Kvasikonformikuvauksia ja Teichmüllerin avaruuksia Suomessa tutkineista matemaatikosta huomattavimpia on *Olli Lehto* (1925–), myöskin Rolf Nevanlinnan oppilas. Lehdon ja *K.I. Virtasen* (1921–2006) vuonna 1965 julkaisema monografia *Quasikonforme Abbildungen* muodostui kvasikonformikuvausten teorian perusreferenssiksi. Lehtokin oli aikanaan Helsingin yliopiston rehtori ja kansleri. Hän on myös ansioitunut monella tapaa matematiikan kansainvälisessä järjestötoiminnassa. Olli Lehto on julkaissut elämäkerrat akateemisesta opettajastaan Rolf Nevanlinnasta sekä Lorenz ja Ernst Lindelöfistä. Kvasikonformikuvausten teoria on Helsingissä muodostanut jatkon suomalaiselle funktioteoreettiselle koulukunnalle. Mm. *Jussi Väisälä* (1935–) on merkittävästi osallistunut kvasikonformikuvausten teorian yleistämiseen n-ulotteisiin avaruuksiin.

18 Laskulaitteista ja tietokoneista

Matematiikan teorioiden soveltaminen käytännön palvelukseen merkitsee lähes aina jonkintasoista laskemista. Laskulaitteiden kehittyminen on johtanut myös siihen, että monet teoreettiset edistysaskelet perustuvat laskemiseen ja laskukoneiden käyttöön.

18.1 Mekaaniset apuvälineet

Lukujen tallentamiseen on käytetty kirjoitusmerkkien ohella mm. nuorissa oleviin solmuja tai riimusauvoja. Jo antiikin aikoina oli ilmeisesti kehittynyt vakiintuneita järjestelmiä numeroiden ilmaisemiseksi tietyillä sormien asennoilla; sataa pienemmät luvut ilmaistiin vasemmalla ja suuremmat oikealla kädellä.

Vanhin laskemisen mekaaninen apuväline on helmitaulu, *abakus*. Se esiintyy eri muodoissa monissa kulttuureissa. Tavallisesti "helmet" eivät ole kiinni tangoissa, vaan lukumääriä osoitetaan viivoille tai uriin asetettavilla irtonaisilla pikku kivillä; tällaisten laskukivien latinankielinen nimi *calculi* (josta saadaan kalkylointi ja englannin *calculus*, differentiaali- ja integraalilaskenta) on samaa kantaa kuin kalkki(kivi).

Helmitaulun ohella ensimmäisiä laskemisen mekaanisia apuvälineitä olivat John Napierin 1600-luvun alussa keksimät *Napierin sauvat* eli *Napierin luut*, joiden avulla saattoi suorittaa gelosia-menetelmän kertolaskuja.

Olennaisesti kehittyneempi kuin helmitaulu on sellainen mekaaninen laskulaite, jossa yhteenlaskun muistinumeron huomioon ottaminen tapahtuu automaattisesti. Ajatuksen tällaisesta laitteesta esittivät Keplerin ystävä *Wilhelm Schickard* (1592–1635) vuonna 1623 ja jesuiittamunkki *Johann Ciermans* (1602–48) vuonna 1640, mutta ensimmäisen toimivan laitteen rakensi *Blaise Pascal* 1642, verohallinnon laskelmia tehneen isänsä avuksi. Seitsemän vuotta myöhemmin Pascalille suotiin kuninkaallinen privilegio laskukoneiden valmistamiseen. Ensimmäiset kertolaskukoneet valmistivat englantilainen *Samuel Morland* (1625–95) ja G. W. Leibniz 1670-luvulla. Toimivan koneen, joka pystyi myös vähentämään ja jakamaan, rakensi ensimmäisenä ranskalainen *Charles Thomas* (1785–1870) vasta vuonna 1820. Ennen elektroniikan aikaa tavallisen nelilaskimen prototyypin kehittivät 1870-luvulla amerikkalainen *Frank Baldwin* (1838–1925) ja ruotsalainen *Willgodt Odhner* (1845–1905). Kaikissa näissä laskimissa kertolasku perustui toistuvaan yhteenlaskuun ja jakolasku vähennyslaskuun. Ensimmäisen kertotaulua suoraan hyödyntävän laskukoneen valmisti *Léon Bollée* vasta vuonna 1887.

Logaritmien keksiminen 1600-luvun alussa oli luonnollisesti merkittävä numerolaskuja nopeuttava edistysaskel. Logaritmien mekaanisen hyväksikäytön mahdollisuudet huomasi ensimmäisenä englantilainen *Edmund Gunter* (1581–1626), joka konstruoi vuonna 1620 logaritmisen asteikon. Sen ja harpin avulla oli mahdollista suorittaa kerto- ja jakolaskuja. Kahden logaritmisen asteikon yhdistämisen *laskuviivaimeksi* keksi englantilainen *William*

Oughtred (1574–1660) vuonna 1622. Ympyränmuotoisen *laskukiekon* kehittivät Oughtred ja hänen oppilaansa *Richard Delamain* (1602–48). Oughtredin laskuviivaimessa ei ollut asteikkoja vastaan kohtisuoralla hiusviivalla varustettua *hahloa*; hahlon ajatuksen esitti Isaac Newton 1675, vaikkakin kyseinen laite tuli yleiseen käyttöön vasta sata vuotta myöhemmin. Nykyisen laskuviivaimen vakiomallin esitti ranskalainen upseeri *Amédée Mannheim* (1831–1906) 1850.

18.2 Babbagesta tietokoneisiin

Koneellisen laskemisen historiassa on erityisasemassa englantilainen *Charles Babbage* (1792–1871). Babbage oli alkuaan matemaatikko; hän toimi matematiikan professorina Cambridgen yliopistossa ja oli aktiivinen jäsen *Analytical Societyssa*, joka pyrki propagoimaan Leibnizin ja Eulerin analyysiä vanhentuneiden Newtonin oppien tilalle. Noin vuodesta 1812 Babbage, jota mm. ärsyttivät monet virheet matemaattisissa taulukoissa, pohti mahdollisuuksia muuntaa mekaaniset laskutoimitukset koneiden suoritettaviksi. Babbage erosi yliopistovirastaan ja omistautui laskukoneen suunnitteluun. Työ vei Babbagen omaisuuden, mutta 1823 Britannian hallitus myönsi hänelle avustuksen ns. *differenssikoneen* rakentamiseksi. Koneen oli määrä laskea matemaattisia taulukoita 26 merkitsevän numeron tarkkuudella, ja sen tuli ottaa huomioon vielä kuudeskin differenssi. Kymmenen vuoden työn jälkeen kone ei ollut vielä valmis. Valtio lopetti tukensa, mutta Babbage jatkoi jälleen omin varoin. Hänen suunnitelmansa oli tällä välin huomattavasti kasvanut: vuodesta 1834 alkaen Babbagen tarkoitukseksi tuli nyt rakentaa *analyyttinen kone*, jossa olisi tuhannen 50-numeroisen luvun mekaaninen muisti (”varasto”) ja jonka laskinosa (”mylly”) pystyisi toimimaan haarautumiskäskyjä sisältävien ohjelmien mukaan. Ohjelmia Babbagelle suunnitteli *Lady Ada Lovelace* (1815–52), runoilija *Byronin* tytär. Käskyt koneelle oli määrä antaa reikäkorteilla. Toimintojen vaatima hienomekaniikka ei ollut kuitenkaan kylliksi kehittynyttä, eikä Babbagen koneesta koskaan valmistunut kuin osia. – Babbagen idean mukaisia differenssikoneita rakennettiin mm. Ruotsissa 1850-luvulla. Vuosina 1985 – 1991 Lontoon Science Museumissa rakennettiin Babbagen alkuperäisten piirustusten mukainen differenssikone, ja se toimii hyvin.

Tietojenkäsittelytekniikan edelläkävijöitä on ranskalaisen *Joseph Jacquardin* (1752–1834) vuonna 1805 esittelemä kutomakone, jonka tarvitsemat usein monimutkaiset toimintaohjeet talletettiin rei'itettyyn kartonkiin, jota kone automaattisesti luki. Amerikkalainen *Hermann Hollerith* (1860–1929) oivalsi reikäkortin merkityksen yleisemmän tiedon tallentamisessa noin vuonna 1885. Hollerithin reikäkorttikoneita käytettiin laajassa mitassa ensi kerran Yhdysvaltain yleisessä väestönlaskennassa vuonna 1890. Hollerithin yrityksestä syntyi 1911 sittemmin johtava tietokonevalmistaja IBM. Saksalainen *Konrad Zuse* (1910–95) yhdisti reikäkortteihin lukujen binaariesityksen 1934.

Menetelmiä käyrän ympäröimän pinta-alan mekaaniseksi määrittämiseksi, ts. mekaanisen integroinnin suorittamiseksi, alkoi syntyä 1810-luvulta alkaen. *Jacob Amslerin* (1823–1912) 1854 konstruoima yksinkertainen *planimetri* oli kaupallinenkin menestys. Samankaltaisia, mutta mutkikkaampia instrumentteja, *harmonisia analysaattoreita* valmistettiin 1870-luvulta alkaen funktion Fourier-sarjan kertoimien mekaaniseksi määrittämiseksi.

Ensimmäisiä suurempia askelia nykyaikaisen tietokoneen suuntaan ovat *Vannevar Bushin*

(1890–1974) Massachusetts Institute of Technologyssa vuodesta 1925 alkaen rakentamat sähkömekaaniset analogialaskimet. Babbagen ideoita seurasi lähemmin *Howard Aikenin* (1900–73) vuonna 1939 Harvardissa IBM:n tuella aloittama *MARK I* - niminen sähkömagneettisilla menetelmillä toimiva laskukone, joka valmistui 1944 ja palveli Yhdysvaltain laivastoa. Jo ennen toista maailmansotaa oli myös Konrad Zuse rakentanut reletoimisia ja lukujen binaarimuotoiseen esitykseen perustuvia laskukoneita; sota esti häntä toteuttamasta suunnitelmiaan releiden korvaamisesta elektroniputkilla.

Ensimmäinen puhtaasti elektronisesti toimiva laskukone oli Pennsylvanian yliopiston ja Yhdysvaltain armeijan *ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer)*, joka valmistui 1945. Se oli tarkoitettu tykistön ampumataulujen laskemiseen. Koneen suunnittelivat *John Mauchley* ja *J. Presper Eckert*, se sisälsi 18 000 elektroniputkea ja painoi 30 tonnia. Jo pari vuotta aikaisemmin oli Englannissa konstruoitu nimenomaan salakirjoitusten selvittämiseen tarkoitettu elektroniputkia käyttävä kone, *Colossus*.

Vuonna 1945 John von Neumann esitti nykyaikaisen tietokoneen perusperiaatteen: koneen tarvitsemat toimintaohjeet voidaan tallettaa koneen muistiin samalla tavoin kuin sen käsiteltävät luvut tai muut tiedot. Ensimmäiset von Neumannin periaatetta soveltavat koneet olivat *EDVAC* ja *EDSAC*; ne rakennettiin 1947 Princetonissa ja Cambridgessä (Mass.). Ensimmäinen varsinainen kaupallinen tietokone, ENIACin rakentajien suunnittelema *UNIVAC*, tuli käyttöön 1951. Transistorit tekivät noin vuodesta 1954 alkaen mahdolliseksi tietokoneiden rakentamisen pienikokoisemmiksi ja luotettavammiksi.

18.3 Matematiikka ja tietokoneet

Jo ennen tietokonetekniikan realisoitumista englantilainen matemaatikko *Alan M. Turing* (1912–54) esitti yleisen teoreettisen mallin universaalilaskukoneelle, joka periaatteessa voi ratkaista kaikki laskennallisesti ratkaistavat tehtävät. *Turingin kone* muodostuu äärettömästä nauhasta, jonka ruutuihin voidaan kirjoittaa ja jota voidaan siirtää eteen- ja taaksepäin kulloinkin tarkasteltavana olevan ruudun sisällöstä riippuen. Turingin ideaalikone ja amerikkalaisen loogikon *Emil Postin* tutkimukset ovat olleet alkuna matemaattiselle *automaattien teorialle*.

Toisen maailmansodan aikana Turingin panos saksalaisten salakirjoitusten, erityisesti ns. Enigma-koneella tuotetun koodin, avaamisessa oli merkittävä. Välittömästi sodan jälkeen Turingilla oli keskeinen asema englantilaisessa ACE-tietokoneprojektissa, jonka suunnitelmat olivat jopa edellä samanaikaisista amerikkalaisista.

Vanhoista matematiikan aloista tietokoneet ovat ilmeisesti eniten hyödyttäneet numeeristen menetelmien teoriaa ja käyttöä. Olennaisesti kasvaneet laskentamahdollisuudet ovat luonnollisesti olleet eduksi monilla matematiikan aloilla, lukuteoriaa myöten. Melkoista huomiota herätti noin sata vuotta matemaatikkoja ja maallikoita askarruttaneen *neliväriongelman* ratkaisu tietokoneella vuonna 1977: monia yksittäistapauksia läpikäynyt tietokonealgoritmi pystyi todistamaan, että jokainen yhdesti yhtenäisiä maa-alueita kuvaava kartta voidaan värittää enintään neljällä värillä niin, että rajanaapurit ovat aina erivärisiä. Tietokoneiden tarjoamat mahdollisuudet kokeilla ja visualisoida ovat antaneet aiheen olettaa, että matematikon työtavat ovat muuttumassa, että perinteisen todistamisen rooli jäisi vähäisemmäksi, kun paljon voidaan ”nähdä suoraan” tai kun hypoteesien tueksi voidaan esittää musertavan vakuuttavia numeerisia todisteita. On kuitenkin ennenaikaista arvioida tietokoneiden lopullista merkitystä matematiikan teorianmuodostukselle ja yleisille metodeille.

19 Matemaattinen yhteisö

Matematiikka on paitsi autonominen teoria myös ihmisyhteisön toimintaa. Matematiikan harrastajien yhteistyö on luonnollisesti paljon vanhempaa kuin sen virallisesti organisoidut muodot. Erityisen tärkeää matematiikan kehitykselle on tiedon leviäminen ja saatavuus. Ennen sähköisten tietoverkkojen aikaa tietoa voitiin siirtää joko paperilla tai sitten siirtämällä tietoa kantavia ihmisiä vaikkapa samaan paikkaan, kongressiin. Jotkin matemaattisen yhteisön toimintamuodot ovat leikkisiäkin. Tällainen on *Erdös-luvun* laskeminen. Poikkeuksellisen paljon yhteisjulkaisuja tuottaneen unkarilaisen *Pál Erdösin* (1913–96) Erdös-luku on 0 ja matemaatikon Erdös-luku on n, jos hän on kirjoittanut yhteisjulkaisun sellaisen matemaatikon kanssa, jonka Erdös-luku on $n-1$.

19.1 Matemaattiset julkaisut

Nykyisin normaali matemaattisen tutkimustuloksen julkaisutapa on artikkeli matemaattisessa aikakausjulkaisussa. Matematiikkaan erikoistuneet aikakausjulkaisut ovat melko nuoria, ensimmäinen lienee vuodesta 1794 ilmestynyt *Journal de l'École Polytechnique*. 1700-luvulla julkaisukanavina olivat yleiset tieteelliset lehdet kuten Acta Eruditorum ja eri tiedeakatemioiden julkaisusarjat. Luonnontieteellisistä akatemioista vanhimpia ovat vuonna 1603 perustettu Rooman *Accademia dei Lincei* (Ilvesten [joilla on tunnetusti tarkka näkö] akatemia), Englannin *Royal Society* vuodelta 1662 ja Ranskan *Académie des Sciences* vuodelta 1666.

Ensimmäinen yksityisesti perustettu matemaattinen julkaisusarja oli Joseph-Diaz Gergonnen 1810 aloittama *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*. Gergonnen annaalit eivät eläneet pitkään, mutta niiden saksalainen vastine, *August Crellen* (1780–1855) vuonna 1826 perustama *Journal für die reine und angewandte Mathematik* ilmestyy yhä. *Joseph Liouville* (1809–82) perusti 1836 Ranskaan uuden, edellisen kanssa lähes samannimisen julkaisun *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*; Crellen journaali ja Liouvillen journaali pitävät sisällään suuren osan 1800-luvun merkittäviä matematiikan edistysaskelia. 1800- ja 1900-lukujen vaihteen aikoihin kohosi erittäin arvostetuksi kansainvälisesti runsaskontaktisen Gösta Mittag-Lefflerin 1882 perustama *Acta Mathematica*. Saksan–Ranskan sota oli tehnyt matematiikan tuonaikaisten suurvaltojen suhteet varsin kireiksi, ja puolueettoman Ruotsin tarjoamaa foorumia käytettiin hyväksi Reinin molemmilla puolilla.

Suomen ensimmäinen tieteellinen akatemia on 1838 perustettu *Suomen Tiedeseura*; sen julkaisusarjat kattavat luonnollisesti suuren osan suomalaisten 1800-luvun matemaatikkojen tuotannosta. Tiedeseuran ensimmäinen sihteeri oli af Schulten, samaa tehtävää hoitivat vuosikymmeniä myös Lorenz Lindelöf ja Ernst Lindelöf. *Suomalainen Tiedeakatemia* perustettiin 1908, paljolti kielikiistojen seurauksena. Vuodesta 1940 sen ensin matematiikalle ja fysiikalle yhdessä, sittemmin matematiikalle omistettu sarja *Annales*

AcademiæScientiarum Fennicæ Series A. I. Mathematica muodostui P.J. Myrbergin ja sittemmin Olli Lehdon toimittamana johtavaksi matemaattiseksi julkaisusarjaksi Suomessa.

Matemaattisen julkaisutoiminnan valtava kasvu ja artikkelien hajautuminen satoihin eri aikakausjulkaisuihin on tehnyt välttämättömäksi keskitetyt referaattijulkaisut. Näistä ensimmäinen on Saksassa vuodesta 1871 alkaen ilmestynyt vuosikirja *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, jota 1930-luvulla seurasi Saksassa *Zentralblatt für Mathematik* ja 1940 Yhdysvalloissa *Mathematical Reviews*. Myös Venäjällä referoidaan kaikki matemaattiset artikkelit *Referativnyi Žurnal Matematyki* -julkaisuun.

19.2 Matemaattisista järjestöistä

Matemaattisista julkaisusarjoista monet ovat nykyisin matemaattisten yhdistysten ja seurojen hallinnassa. Vanhimmat erityisesti matematiikkaan erikoistuneet seurat ovat tiettävästi vuosina 1690 ja 1776 perustetut Hampurin ja Amsterdamin matemaattiset yhdistykset. Moskovan matemaattinen yhdistys on vuodelta 1860 ja *London Mathematical Society* vuodelta 1865. Lorenz Lindelöfin perustama *Suomen matemaattinen yhdistys* on vain kolme vuotta nuorempi! Nykyisin luultavasti suurin tieteellinen matemaattinen yhdistys on 1888 perustettu *American Mathematical Society*. Saksan *Deutsche Mathematikervereinigung* on perustettu 1890.

Matemaatikkojen kansainvälisen yhteistoiminnan näkyvimpiä muotoja on noin joka neljäs vuosi pidettävä *ICM*, International Congress of Mathematicians. Ensimmäinen kongressi pidettiin 1897 Zürichissä; merkittävä taustavaikuttaja kokouksen koolle kutsumisessa oli Mittag-Leffler. Osallistujia oli noin 200. Seuraavat kokoukset pidettiin 1900 Pariisissa, 1904 Heidelbergissä, 1908 Roomassa ja 1912 Cambridgessä Englannissa. Alusta alkaen kongresseihin on kuulunut matematiikan tärkeitä ajankohtaisia kehityskulkuja valaisevia yleisluentoja sekä erityiskysymyksiin keskittyviä sektioluentoja.

Vuoden 1924 kongressi pidettiin Torontossa. Kokouksen puheenjohtaja, kanadalainen *J. C. Fields* ehdotti, että kongressin taloudellinen ylijäämä muodostettaisiin palkintorahastoksi, josta kunkin kongressin yhteydessä palkittaisiin kaksi merkittäviin saavutuksiin yltänyttä nuorta matemaatikkoa. Näin syntyi *Fieldsin mitali*, lähin vastine Nobelin palkinnolle matematiikan alalla. Fieldsin mitaliin liittyvä rahallinen palkinto on kuitenkin varsin vaatimaton Nobelin palkintoon verrattuna. (Usein esitettyyn kysymykseen siitä, miksi matematiikka ei kuulu niihin viiteen inhimillisen toiminnan alaan, jotka Alfred Nobel katsoi palkintojensa arvoisiksi, ei ole selvää vastausta. Taustalla on joskus arveltu olleen Nobelin ja Mittag-Lefflerin henkilöihin liittyvien seikkojen. Ainoa varsinaisen Nobelin palkinnon saanut näissä luennoissa mainittu henkilö on Bertrand Russell. Hänelle myönnettiin kirjallisuuden Nobelin palkinto vuonna 1950. Monet fysiikan Nobelin palkintojen saajat ovat luonnollisesti olleet matemaattisesti eteviä, samoin Nobelin alkuperäiseen ohjelmaan kuulumattomien, vuodesta 1969 jaettujen taloustieteen Nobelin palkintojen saajat.) Ensimmäiset Fieldsin mitalit jaettiin Oslon kongressissa 1936 Lars Ahlforsille ja amerikkalaiselle *Jesse Douglasille*, joka oli variaatiolaskennan tutkija.

Kansainväliset matemaatikkokongressit toimivat kauan ilman pysyvää kansainvälistä taustaorganisaatiota. 1920-luvulla tehdyt yritykset kansainvälisen matemaatikkoliiton luomiseksi kariutuivat poliittisiin ristiriitoihin 1930-luvun alussa, mutta 1940-luvun lopulla perustettiin *Kansainvälinen matemaattinen unioni IMU*. IMUn presidentti vuosina 1959–62 oli Rolf Nevanlinna; sen pääsihteerinä toimi vuosina 1979–90 Olli Lehto. IMU on nyttemmin vastuussa kansainvälisten kongressien ohjelmasta samoin kuin Fieldsin mitalien jaosta. Maailman matemaattinen vuosi 2000 oli IMU:n aloite. Olli Lehto on kirjoittanut myös järjestöhistoriaksi erittäin mielenkiintoisen IMU:n historian *Mathematics without Borders* (1998). IMU:n yhteydessä toimii ICMI, Kansainvälinen matematiikan opetuksen komissio (International Commission of Mathematical Instruction), joka on organisoitunut jo ennen ensimmäistä maailmansotaa. Se järjestää myös neljän vuoden välein ICME-nimisiä (International Congress of Mathematical Education) matematiikan opetuksen yleiskongresseja.

Matematiikan kansainvälinen kokoustoiminta on monipuolista ja eriytynyttä. Maantieteellisin perustein kokoontuvista kongresseista meitä lähinnä ovat neljän vuoden välein pidettävä *Skandinaavinen matemaatikkokongressi*. Ensimmäinen tällainen pidettiin 1909 Tukholmassa, Mittag-Lefflerin aloitteesta. Matemaattinen järjestöyhteistyö Euroopan puitteissa on muorempaa. *European Mathematical Society* perustettiin 1990 ja ensimmäinen Euroopan matemaattinen kongressi pidettiin Budapestissä 1992.

19.3 Matematiikka ja naiset

Historian merkittäväksi tunnustamat matemaatikot ovat valtaosaltaan olleet miehiä. Suurelta osalta tämä tilanne selittyy siitä, että opintie ei ole aikaisemmin ollut naisille avoin. Samantapaisen sukupuolijakauman kohtaa lähes kaikilla tieteenaloilla.

Näissä luennoissa on aikaisemmin mainittu naispuoliset matemaatikot Hypatia, Maria Agnesi[1] ja Emmy Noether sekä ohjelmoinnin pioneeri Ada Lovelace. Ainakin matematiikan historian marginaaleista löytyy muutama muukin naisnimi.

Ranskalainen *Sophie Germain* (1776–1831) kävi miehisen salanimen *M. Le Blanc* turvin kirjeenvaihtoa Gaussin kanssa. Germain selvitti Fermat'n suuren lauseen todistuksen eräissä erikoistapauksissa.

Venäläinen *Sofia (Sonja) Kovalevskaja* (1850–91) nautti Weierstrassin yksityisopetusta. Hän julkaisi tutkimuksia osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisujen olemassaolosta ja mekaniikasta. Mittag-Leffler pystyi järjestämään Kovalevskajalle professuurin Tukholmaan 1883. Kovalevskaja on täten ensimmäisiä varsinaisesti yliopistovirkaan yltäneitä naismatemaatikkoja. Maria Agnesi oli myös jonkin aikaa professorina Bolognassa, mutta luopui tehtävästä pian. Naisten osuus matematiikan tutkijoista ja yliopistovirkojen haltijoista on edelleen melko vähäinen.

[1] Toinen italialainen, Agnesin aikalainen *Diamante Medaglia* (1724–70) julkaisi väitöskirjankin matematiikan ja fysiikan opettamisesta naisilla.

20 Matematiikan filosofiasta

1800-luvun lopulla ja viime vuosisadan alkupuolella matematiikan olemuksesta esitetyt filosofiset käsitykset voidaan karkeasti jakaa kolmeksi suuntaukseksi, jotka ovat *logistinen, intuitionistinen* ja *formalistinen.*

Logistisen koulukunnan pääteesin voi kiteyttää ajatukseen, jonka mukaan matematiikka on yksi logiikan haara. Ei ole erityisiä matematiikan aksioomia, joista matematiikka alkaisi. Koulukunnan edelläkävijöitä ovat Dedekind, Frege ja Peano, mutta sen varsinainen huippukohta on Whiteheadin ja Russellin 1910–13 ilmestynyt suurteos Principia Mathematica; lisäyksiä ja parannuksia ovat esittäneet monet myöhemmät kirjoittajat. Principian tavoitteena on johtaa luonnollisten lukujen järjestelmä (ja siten välillisesti kaikki luonnollisiin lukuihin pohjautuva matematiikka) aukottomasti loogisista primitiivi-ideoista ja primitiivilauseista, jotka puolestaan käsitetään reaalimaailman mielekkäiksi kuvauksiksi. Primitiiveistä johdetaan lausekalkyyli sekä luokkien ja relaatioiden teoria. Joukko-opin paradoksit torjutaan tyyppiteorian avulla. Täyttä yksimielisyyttä siitä, onko logistinen ohjelma saavuttanut tavoitteensa, ei ole.

Intuitionismin juuret ovat mm. Kroneckerin käsityksissä. Tämä mm. torjui irrationaaliluvut. Myös Poincaré ja useat muut 1900-luvun alun ranskalaismatemaatikot näkivät asiat mieluiten intuitionistisessa valossa.

Intuitionismin ohjelman formuloi Brouwer 1912. Brouwerin mukaan matematiikan pohjalla on se, miten ihmisen mieli hahmottaa ajan ja siihen liittyvän peräkkäisyyden. Tämä puolestaan johtaa luonnollisten lukujen järjestelmään, josta ihmisellä siis on luontainen intuitio, joka ei riipu kielestä tai ulkomaailmasta saaduista kokemuksista. Logiikka on itse asiassa syntynyt äärellisiä joukkoja koskevien matemaattisten relaatioiden yleistyksenä, eikä suinkaan ole matematiikkaa primitiivisempää.

Intuitionismin perusperiaatteita on *konstruktivismi.* Matemaattiset tulokset on voitava johtaa äärellisin, konstruktiivisin menetelmin. Useimmin esiintyviä fraaseja matemaattisessa kirjallisuudessa on ”on olemassa x, joka ...”. Olion olemassaolon todistamiseksi ei intuitionistien käsityksen mukaan riitä se, että olion ei-olemassaolo johtaa ristiriitaan, vaan olio on voitava rakentaa äärellisin operaatioin olemassa oleviksi tiedetyistä olioista, viime kädessä luonnollisista luvuista. Induktio esimerkiksi ei ole riittävä olemassaoloperustelu. Vaikeuksia syntyy äärettömien kokoelmien suhteen, sillä arkilogiikan kolmannen poissuljetun sääntö ei tällöin välttämättä päde. Lauseesta ”ympyrän kehän ja halkaisijan suhteen desimaalilukuesityksessä esiintyy ainakin kerran jakso 123456789” emme voi sanoa, että se on joko tosi tai epätosi, ainakaan ennen kuin kyseinen jakso sattuu löytymään π:n kehitelmästä. Eukleideen todistus alkulukujen joukon äärettömyydestä ei päde, sen sijaan alkuluvun määritelmä kelpaa, koska ominaisuus voidaan aina testata äärellisen monella operaatiolla.

Intuitionismin myöhemmistä kehittäjistä on tärkein hollantilainen *Arend Heyting* (1898–1990), joka 1930 kehitti intuitionistisen matematiikan mukaisen symbolisen logiikan järjestelmän.

Formalistisen koulukunnan perusti Hilbert. Aksiomatisoidessaan euklidisen geometrian 1899 hän oli luonut esikuvan muille matematiikan aksiomaattisille järjestelmille, joiden toimivuus ei riipu käytettyjen käsitteiden konkreettisesta tulkinnasta. Joukko-opin paradoksit ja intuitionistisen ohjelman implikoima matematiikan toimipiirin radikaalin kaventumisen uhka saivat Hilbertin 1920-luvulla esittämään käsityksen matematiikasta puhtaasti formaalisena järjestelmänä, jolla sinänsä ei ole "sisältöä". Olennaista on järjestelmän *ristiriidattomuus*, ts. järjestelmään ei saa sisältyä muotoa "P ja ei-P" olevaa lausetta tai kaavaa. Hilbert yritti löytää todistuksen matematiikan tai ainakin mahdollisimman suuren matematiikan osan ristiriidattomuudelle. Joissakin tarkoin rajatuissa puitteissa kuten ns. ensi kertaluvun predikaattikalkyylissa tämä onnistuikin, ja Hilbertin koulukunnan tavoitteena oli osoittaa joukko-opin ja aritmetiikan aksioomajärjestelmien ristiriidattomuus. Vuonna 1931 tšekkiläissyntyinen *Kurt Gödel* (1906–78) kuitenkin todisti, että kaikissa tarpeeksi rikkaissa matemaattisissa systeemeissä, kuten esim. Peanon aksioomiin perustuvassa luonnollisten lukujen järjestelmässä, on aina lauseita, joita ei voi todistaa järjestelmään itseensä kuuluvin metodein. Yksi tällainen väite on juuri systeemin ristiriidattomuus. Gödelin todistus perustui aritmeettisten käsitteiden, operaatioiden ja väittämien numerointiin, joka teki mahdolliseksi tulkita lukuja koskevia lauseita koskevat väittämät, kuten "tämä lause ei ole todistettavissa", lukuteorian aineksiksi.

Vielä etäämmälle käytännön matematiikasta johtavat jatkuvasti vireillä olevat pohdiskelut siitä, onko matematiikka ihmisen tuotetta vai onko sillä ihmisestä riippumaton olemassaolo, keksitäänkö vai löydetäänkö matematiikkaa. Jälkimmäinen näkemys kulkee *platonismin* nimellä.