Logiikka I, Kevät 2012
Kertaustehtäviä 2. kurssikokeeseen
Esimerkkiratkaisuja, Kaarlo Reipas.

1. Ks. materiaali

2. Transitiivisuus:

Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$. Oletetaan, että $(x,y) \in R$ ja $(y,z) \in R$. Tällöin $x-y \in \mathbb{N}$ ja $y-z \in \mathbb{N}$. Kahden luonnollisen luvun summa on luonnollinen luku, joten

$$x - z = (x-y) + (y-z) \in \mathbb{N},$$

siis $(x,z) \in R$. $\square$

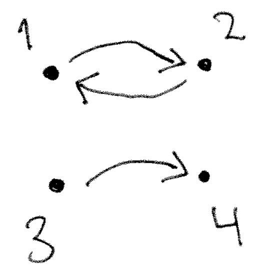
Refleksiivisyys:

Olkoon $x \in \mathbb{R}$. $x - x = 0 \in \mathbb{N}$, joten $(x,x) \in R$. $\square$

R ei ole symmetrinen, sillä esimerkiksi $(3,2) \in R$, sillä $3-2 = 1 \in \mathbb{N}$. Kuitenkaan $(2,3) \notin R$, sillä $2-3 = -1 \notin \mathbb{N}$.

3. a) Esimerkiksi joukko $\mathbb{N}$ ja tyhjä relaatio $\emptyset$.
Jos $(a,b) \in \emptyset$, niin mitä tahansa pätee, joten myös $(b,a) \in \emptyset$.
Toisaalta jos pätisi $(a,b) \in \emptyset$ ja $(b,a) \in \emptyset$, niin mitä tahansa pätisi, joten $a=b$.

b) Olkoon $X=\{1,2,3,4\}$ ja R seuraavan kaavion antama relaatio:



Koska $(1,2) \in R$ ja $(2,1) \in R$, ei R voi olla antisymmetrinen. Toisaalta, koska $(3,4) \in R$, mutta $(4,3) \notin R$, ei relaatio myöskään voi olla symmetrinen.

4. Olkoot R ja S symmetrisiä relaatioita.

Oletetaan, että $(x,y) \in R \cup S$. Siis $(x,y) \in R$ tai $(x,y) \in S$. Jos $(x,y) \in R$, $(y,x) \in R$ relaation R symmetrisyyden nojalla. Tällöin $(y,x) \in R \cup S$.
Toisaalta jos $(x,y) \in S$, relaation S symmetrisyyden nojalla $(y,x) \in S$, joten $(y,x) \in R \cup S$.
Kummassakin tapauksessa $(y,x) \in R \cup S$, joten $R \cup S$ on symmetrinen.

Oletetaan, että $(x,y) \in R \cap S$. Tällöin $(x,y) \in R$ ja $(x,y) \in S$. Näiden relaatioiden symmetrisyyden nojalla $(y,x) \in R$ ja $(y,x) \in S$, joten $(y,x) \in R \cap S$.
Siis $R \cap S$ on symmetrinen.

5. a) Ei ole, x_0 vapaana.

b) Ei ole, x_0 vapaana.

c) Ei ole, x_1 vapaana.

d) On, kaikki muuttujat kvantifioitu.

e) Ei ole, x_1 vapaana.

6. a) $\mathcal{M} \not\models_s R(x_1, x_2)$, sillä

$(s(x_1), s(x_2)) = (7,4) \notin \{(n, n+3) : n \in \mathbb{N}\} = R^{\mathcal{M}}$

b) Koska $(s(x_2), s(x_1)) = (4,7) \in \{(n, n+3) : n \in \mathbb{N}\} = R^{\mathcal{M}}$,

$\mathcal{M} \models_s R(x_2, x_1)$, ja täten

$\mathcal{M} \models_s P(x_0) \to R(x_2, x_1)$.

c) $\mathcal{M} \models_s \neg P(x_1) \wedge P(x_0) \wedge \neg P(x_2)$

$\Leftrightarrow \mathcal{M} \models_s \neg P(x_1)$, $\mathcal{M} \models_s P(x_0)$ ja $\mathcal{M} \models_s \neg P(x_2)$

$\Leftrightarrow$ ~~$s(x_1)$~~ $\mathcal{M} \not\models_s P(x_1)$, $\mathcal{M} \models_s P(x_0)$ ja $\mathcal{M} \not\models_s P(x_2)$

$\Leftrightarrow s(x_1) = 7 \notin P^{\mathcal{M}}$, $s(x_0) = 2 \in P^{\mathcal{M}}$ ja $s(x_2) = 4 \notin P^{\mathcal{M}}$.

Koska $4 \in P^{\mathcal{M}}$, $\mathcal{M} \not\models_s \neg P(x_1) \wedge P(x_0) \wedge \neg P(x_2)$.

7. a) $\mathcal{M} \models_s \exists x_2 \neg P(x_2) \Leftrightarrow$ on alkio $a \in M$, jolla

$$\mathcal{M} \models_{s(a/x_2)} \neg P(x_2)$$

$\Leftrightarrow$ löytyy $a \in M$, $\mathcal{M} \not\models_{s(a/x_2)} P(x_2)$

$\Leftrightarrow$ ——"——, $s(a/x_2)(x_2) \notin P^{\mathcal{M}}$

$\Leftrightarrow$ ——"—— $a \notin P^{\mathcal{M}}$

Koska esim. $1 \notin P^{\mathcal{M}}$, $\mathcal{M} \models_s \exists x_2 \neg P(x_2)$.

b) $\mathcal{M} \models_s \exists x_1 R(x_1, x_0)$

$\Leftrightarrow$ löytyy $a \in M$, jolla $\mathcal{M} \models_{s(a/x_1)} R(x_1, x_0)$

$\Leftrightarrow$ ——"—— $(s(a/x_1)(x_1), s(a/x_1)(x_0)) \in R^{\mathcal{M}}$

$\Leftrightarrow$ ——"—— $(a, \underbrace{s(x_0)}_{=2}) \in R^{\mathcal{M}}$

Koska $2 \neq n+3$ millään $n \in \mathbb{N}$, tällaista alkiota a ei löydy. Siis $\mathcal{M} \not\models_s \exists x_1 R(x_1, x_0)$.

c) $\mathcal{M} \models_s \exists x_1 R(x_1, x_2) \Leftrightarrow$ löytyy $a \in M$, jolla

$$\mathcal{M} \models_{s(a/x_1)} R(x_1, x_2)$$

$\Leftrightarrow$ löytyy $a \in M$, $(s(a/x_1)(x_1), s(a/x_1)(x_2)) \in R^{\mathcal{M}}$ ...

JATKUU

$\Leftrightarrow$ löytyy $a \in M$, $(a, \underbrace{s(x_2)}_{=4}) \in R^M$

Koska $(1,4) \in R^M$, $M \models_s \exists x_1 R(x_1, x_2)$.

d) $M \models_s \exists x_0 \exists x_1 (P(x_0) \wedge R(x_1, x_0))$

$\Leftrightarrow$ löytyy $a \in M$; $M \models_{s(a/x_0)} \exists x_1 (P(x_0) \wedge R(x_1, x_0))$

$\Leftrightarrow$ löytyy $a \in M$, $b \in M$: $M \models_{s(a/x_0)(b/x_1)} P(x_0) \wedge R(x_1, x_0)$

$\Leftrightarrow$ löytyy $a, b \in M$: $M \models_{s(a/x_0)(b/x_1)} P(x_0)$
ja $M \models_{s(a/x_0)(b/x_1)} R(x_1, x_0)$

$\Leftrightarrow$ löytyy $a, b \in M$: $s(a/x_0)(b/x_1)(x_0) \in P^M$
ja $(s(a/x_0)(b/x_1)(x_1), s(a/x_0)(b/x_1)(x_0)) \in R^M$

$\Leftrightarrow$ ——||—— $a \in P^M$ ja $(b, a) \in R^M$.

Kun valitaan esim. $a = 6$ ja $b = 3$, huomataan, että $a \in P^M$ ja $(b, a) \in R^M$. Siis

$M \models_s \exists x_0 \exists x_1 (P(x_0) \wedge R(x_1, x_0))$.

8. a) Tarskin totuusmääritelmän nojalla

$\mathcal{M} \models_s \forall x_0 \neg E(x_0, x_0)$

$\Leftrightarrow$ kaikilla $a \in M$, $\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} \neg E(x_0, x_0)$

$\Leftrightarrow$ kaikilla $a \in M$, $\mathcal{M} \not\models_{s(a/x_0)} E(x_0, x_0)$

$\Leftrightarrow$ kaikilla $a \in M$, $\underbrace{(s(a/x_0)(x_0), s(a/x_0)(x_0))}_{=(a,a)} \notin E^{\mathcal{M}}$.

Verkossa mikään alkio ei ole relaatiossa itseensä, joten $\mathcal{M} \models_s \forall x_0 \neg E(x_0, x_0)$.

b) Olkoot $a, b \in M$ mielivaltaisia. Symmetrisyyden nojalla jos $(a,b) \in E^{\mathcal{G}}$, niin $(b,a) \in E^{\mathcal{G}}$.

Kun ilmaistaan $a = s(a/x_0)(b/x_1)(x_0)$ ja $b = s(a/x_0)(b/x_1)(x_1)$, saadaan, että joko

$(s(a/x_0)(b/x_1)(x_0), s(a/x_0)(b/x_1)(x_1)) \notin E^{\mathcal{G}}$

tai $(s(a/x_0)(b/x_1)(x_1), s(a/x_0)(b/x_1)(x_0)) \in E^{\mathcal{G}}$,

eli joko $\mathcal{M} \not\models_{s(a/x_0)(b/x_1)} E(x_0, x_1)$

tai $\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)(b/x_1)} E(x_1, x_0)$

JATKUU...

Täten $M \models_{s(a/x_0)(b/x_1)} E(x_0,x_1) \to E(x_1,x_0)$

Koska $b \in M$ oli mielivaltainen,

$$M \models_{s(a/x_0)} \forall x_1 (E(x_0,x_1) \to E(x_1,x_0)).$$

vastaavasti

$$M \models_s \forall x_0 \forall x_1 (E(x_0,x_1) \to E(x_1,x_0)).$$

9\. Ks. materiaali.

10\. a) On, se on bijektio, sillä sen käänteiskuvaus on $x \mapsto x-1$, ja se on automorfismi, sillä $\forall x,y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(x,y) \in <^{\mathbb{R}} &\Leftrightarrow x<y \Leftrightarrow x+1 < \cancel{x}y+1 \\ &\Leftrightarrow f(x) < f(y) \\ &\Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in <^{\mathbb{R}},\end{aligned}$$

missä $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$.

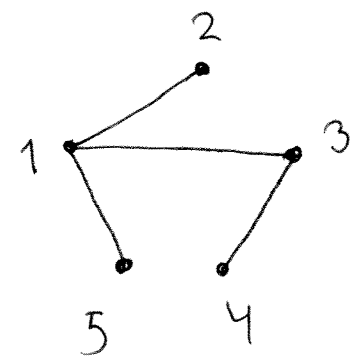
b) $e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, joten $x \mapsto e^x$ ei ole surjektio. Se ei siis ole bijektio, eikä siten automorfismi.

c) Kuvaus ei ole automorfismi, sillä

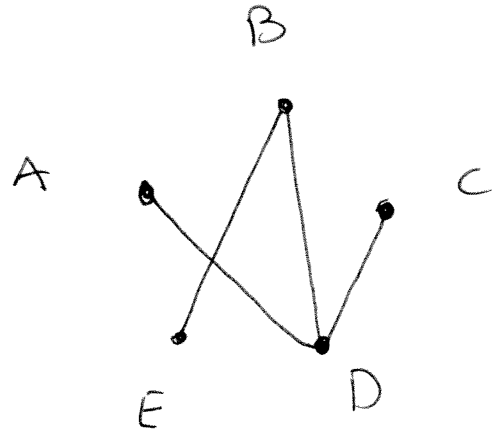
$1<2 \Leftrightarrow (1,2) \in <^R$, mutta

$(-1,-2) \notin <^R$, sillä $-1 \not< -2$.

11.



$\mathcal{G}_1$



$\mathcal{G}_2$

Olkoon $f: \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ kuvaus

$$\begin{cases} f(1) = D \\ f(2) = A \\ f(3) = B \\ f(4) = E \\ f(5) = C \end{cases}$$

Näin määritelty f on selvästi injektio ja surjektio, siis bijektio.

Se myös selvästi säilyttää ~~relaation~~ symbolin E tulkinnan, joten se on isomorfismi.

Siis $\mathcal{G}_1$ ja $\mathcal{G}_2$ ovat isomorfiset.

12.

$M_1 \quad \cdots \to -3 \to -2 \to -1 \to 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to \cdots$

$M_2 \quad \cdots \to 3 \to 2 \to 1 \to 0 \to -1 \to -2 \to -3 \to -4 \to \cdots$

Olkoon $f: M_1 \to M_2$, $f(n) = -n$.

Tämä kuvaus on itsensä käänteiskuvaus, joten se on bijektio $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

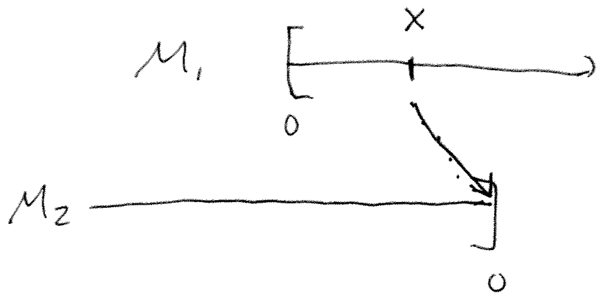
Lisäksi $\forall x, y \in M_1$,

$$(x,y) \in R^{M_1} \Leftrightarrow x+1=y$$
$$\Leftrightarrow -(x+1) = -y$$
$$\Leftrightarrow -x-1 = -y$$
$$\Leftrightarrow f(x)-1 = f(y)$$
$$\Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in R^{M_2}.$$

Siis f on isomorfismi, joten M_1 ja M_2 ovat isomorfiset.

13. Tehdään vastaoletus: Löytyy isomorfismi $f: \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$.

Koska f on surjektio, jokin $x \in \mathcal{M}_1$ kuvautuu alkiolle $0 \in \mathcal{M}_2$, $f(x) = 0$.



Nyt esimerkiksi

$(x, x+1) \in <^{\mathcal{M}_1}$, joten

tulisi olla $(f(x), f(x+1)) \in <^{\mathcal{M}_2}$,

$$\text{eli } f(x+1) > 0,\ f(x+1) \in \mathcal{M}_2.$$

Tälläista alkiota ei kuitenkaan mallissa $\mathcal{M}_2$ ole, mikä on kaivattu ristiriita. □

14. Ks. materiaali.

15. a) Olkoon $\varphi = S(x_0)$.

Tällöin $\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} \varphi \iff s(a/x_0)(x_0) \in S^{\mathcal{M}}$

$\iff a \in S^{\mathcal{M}}$. Siis φ määrittelee joukon $S^{\mathcal{M}}$.

b) Olkoon $\varphi = P(x_0) \wedge \neg S(x_0)$. Nyt

$\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} \varphi \iff \mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} P(x_0)$ ja $\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} \neg S(x_0)$

$\iff s(a/x_0)(x_0) \in P^{\mathcal{M}}$ ja $\mathcal{M} \not\models_{s(a/x_0)} S(x_0)$

$\iff a \in P^{\mathcal{M}}$ ja $a = s(a/x_0)(x_0) \notin S^{\mathcal{M}} \iff a \in P^{\mathcal{M}} \setminus S^{\mathcal{M}}$

Siis φ määrittelee joukon $P^{\mathcal{M}} \setminus S^{\mathcal{M}}$.

c) Kaikilla $a \in M$

$$\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} R(x_0, x_0) \iff (s(a/x_0)(x_0), s(a/x_0)(x_0)) \in R^{\mathcal{M}}$$

$$\iff (a,a) \in R^{\mathcal{M}}.$$

Siis kaava $R(x_0, x_0)$ määrittelee joukon

$$\{a \in M : (a,a) \in R^{\mathcal{M}}\}.$$

d) Olkoon $\varphi = \exists x_1 (R(x_0, x_1) \wedge \neg x_0 = x_1)$ ja $a \in M$

Tällöin $\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} \exists x_1 (R(x_0, x_1) \wedge \neg x_0 = x_1)$

jollakin $b \in M$

$\iff \mathcal{M} \models_{s(a/x_0)(b/x_1)} R(x_0, x_1) \wedge \neg x_0 = x_1$

$\iff$ jollakin $b \in M$

$\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)(b/x_1)} R(x_0, x_1)$ ja $\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)(b/x_1)} \neg x_0 = x_1$

$\iff \ldots$

$\iff$ jollakin $b \in M$

$(a,b) \in R^{\mathcal{M}}$ ja $a \neq b$.

$\iff$ a on relaatiossa R johonkin muuhun kuin itseensä.

Siis φ määrittelee halutun joukon.

e) Olkoon $\varphi = \exists x_1 (P(x_1) \wedge R(x_0, x_1))$. Kuten kohdassa d), φ määrittelee halutun joukon.

16. Olkoon $a \in \mathcal{G}$. $a \in \emptyset$ ei päde koskaan, eikä myöskään $\mathcal{G} \models_{s(a/x_0)} \neg x_0 = x_0$, joten $\neg x_0 = x_0$ määrittelee joukon $\emptyset$.

Vastaavasti kaava $x_0 = x_0$ määrittelee joukon $\mathcal{G}$.

Olkoon $\varphi = \exists x_1 E(x_0, x_1)$, $a \in M$.

Tällöin $\mathcal{G} \models_{s(a/x_0)} \varphi \iff$ löytyy $b \in \mathcal{G}$, $\mathcal{G} \models_{s(a/x_0)(b/x_1)} E(x_0, x_1)$

$\iff$ löytyy $b \in \mathcal{G}$, jolla $(s(a/x_0)(b/x_1)(x_0), s(a/x_0)(b/x_1)(x_1)) \in E^{\mathcal{G}}$

$\iff$ —||— jolla $(a,b) \in E^{\mathcal{G}}$

$\iff a \in \{1,2,4\}$.

Siis φ määrittelee joukon $\{1,2,4\}$.

Helposti nähdään, että $\neg\varphi$ määrittelee joukon $\{3\}$.

17. Olkoon $A \subset \mathcal{G}$, $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathcal{G}$, $A \neq \{1,2,4\}$, $A \neq \{3\}$.
Siis A sisältää jonkin alkion $a \in \{1,2,4\}$, mutta ei jotakin $b \in \{1,2,4\}$.
Määritellään $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, niin että se vaihtaa alkiot a ja b, mutta pitää muut alkiot paikallaan.

JATKUU ...?

Näin saatu kuvaus on selvästi automorfismi.

Jos A olisi määriteltävä, se säilyisi automorfismeissa, eli koska $a \in A$, tulisi olla $\underbrace{f(a)}_{=b} \in A$. Siis A ei voi olla määriteltävä.

18.

$$\neg\neg\exists x_0(\forall x_1 R(x_0, x_1) \wedge \forall x_1 \neg R(x_1, x_0)) \checkmark$$
$$|$$
$$\exists x_0(\forall x_1 R(x_0, x_1) \wedge \forall x_1 \neg R(x_1, x_0)) \checkmark$$
$$|$$
$$\forall x_1 R(c_0, x_1) \wedge \forall x_1 \neg R(x_1, c_0) \checkmark$$
$$|$$
$$\forall x_1 R(c_0, x_1)$$
$$|$$
$$\forall x_1 \neg R(x_1, c_0)$$
$$|$$
$$R(c_0, c_0)$$
$$|$$
$$\neg R(c_0, c_0)$$
$$|$$
$$\times$$

19.

$\exists x_1 \forall x_0 R(x_0, x_1)$ ✓

$\neg \forall x_0 \exists x_1 R(x_0, x_1)$ ✓

$\forall x_0 R(x_0, c_0)$

$\neg \exists x_1 R(c_1, x_1)$

$R(c_1, c_0)$

$\neg R(c_1, c_0)$

$\times$

20\. a)

$$\forall x_0 \forall x_1 (R(x_0,x_1) \to (P(x_0) \wedge \neg P(x_1)))$$

$\forall E^{*}$

$$\forall x_1 (R(x_0,x_1) \to (P(x_0) \wedge \neg P(x_1)))$$

$\forall E^{**}$

$$[R(x_0,x_0)]^1 \quad R(x_0,x_0) \to (P(x_0) \wedge \neg P(x_0))$$

$\to E$

$$P(x_0) \wedge \neg P(x_0)$$

$\neg I, 1$

$$\neg R(x_0,x_0)$$

$\forall I$

$$\forall x_0 \neg R(x_0,x_0)$$

x_0 ei vapaana oletuksissa.

* x_0 ei tule sidotuksi

** x_1 ei tule sidotuksi.

b)

$$\forall x_0 \forall x_1 (R(x_0,x_1) \to (P(x_0) \wedge \neg P(x_1)))$$

$\forall E$ ← x_0 ei tule sidotuksi

$$\forall x_1 (R(x_0,x_1) \to (P(x_0) \wedge \neg P(x_1)))$$

$\forall E$ ← x_1 ei tule sidotuksi

$$[R(x_0,x_1)]^1 \quad R(x_0,x_1) \to (P(x_0) \wedge \neg P(x_1))$$

$\to E$

$$P(x_0) \wedge \neg P(x_1)$$

$\wedge E$

$$P(x_0)$$

$\exists I$ ← x_0 vapaana $P(x_0)$:ssa

$$[\exists x_0 R(x_0,x_1)]^2 \quad \exists x_3 P(x_3)$$

$\exists E, 1$ ← x_0 ei vapaana $\exists x_3 P(x_3)$:ssa eikä oletuksissa

$$\exists x_3 P(x_3) \quad [\neg \exists x_3 P(x_3)]^3$$

$\wedge I$

$$\exists x_3 P(x_3) \wedge \neg \exists x_3 P(x_3)$$

$\neg I, 2$

$$\neg \exists x_0 R(x_0,x_1)$$

$\to I, 3$

$$\neg \exists x_3 P(x_3) \to \neg \exists x_0 R(x_0,x_1)$$

21.

$$\dfrac{[\forall x_1(P(x_1)\to Q(x_0,x_1))]^2}{P(x_3)\to Q(x_0,x_3)}\,\forall E\,{*} \qquad \dfrac{[P(x_3)\land\neg Q(x_0,x_3)]^1}{P(x_3)}\,\land E$$

$$\dfrac{P(x_3)\to Q(x_0,x_3) \qquad P(x_3)}{Q(x_0,x_3)}\,\to E \qquad \dfrac{[P(x_3)\land\neg Q(x_0,x_3)]^1}{\neg Q(x_0,x_3)}\,\land E$$

$$\dfrac{Q(x_0,x_3) \qquad \neg Q(x_0,x_3)}{Q(x_0,x_3)\land\neg Q(x_0,x_3)}\,\land I$$

$$\dfrac{[\forall x_2\exists x_3(P(x_3)\land\neg Q(x_2,x_3))]^3}{\exists x_3(P(x_3)\land\neg Q(x_0,x_3))}\,\forall E\,{**} \qquad \dfrac{Q(x_0,x_3)\land\neg Q(x_0,x_3)}{\neg x_1=x_1}\,\neg I$$

$$\dfrac{\exists x_3(P(x_3)\land\neg Q(x_0,x_3)) \qquad \neg x_1=x_1}{\neg x_1=x_1}\,\exists E,1\ {***}$$

$$\dfrac{\exists x_0\forall x_1(P(x_1)\to Q(x_0,x_1)) \qquad \neg x_1=x_1}{\neg x_1=x_1}\,\exists E,2\ {****} \qquad \dfrac{}{x_1=x_1}\,=1$$

$$\dfrac{\neg x_1=x_1 \qquad x_1=x_1}{x_1=x_1\land\neg x_1=x_1}\,\land I$$

$$\dfrac{x_1=x_1\land\neg x_1=x_1}{\neg\forall x_2\exists x_3(P(x_3)\land\neg Q(x_2,x_3))}\,\neg I,3$$

* x_3 ei tule sidotuksi.

** x_0 ei tule sidotuksi

*** x_3 ei vapaana $\neg x_1=x_1$:ssä eikä oletuksissa, paitsi $P(x_3)\land\neg Q(x_0,x_3)$:ssa.

**** x_0 ei vapaana $\neg x_1=x_1$:ssa, eikä oletuksissa, paitsi $\forall x_1(P(x_1)\to Q(x_0,x_1))$:ssa.

22. Eheyslauseen nojalla riittää näyttää, että

$$\forall x_0 \neg(P(x_0)\wedge S(x_0)) \not\Rightarrow \forall x_0(P(x_0)\vee S(x_0)).$$

Tulee siis löytää malli, jossa pätee

$$\forall x_0\neg(P(x_0)\wedge S(x_0)) \text{ ja } \neg\forall x_0(P(x_0)\vee S(x_0)).$$

$$\forall x_0\neg(P(x_0)\wedge S(x_0))$$
$$|$$
$$\neg\forall x_0(P(x_0)\vee S(x_0)) \checkmark$$
$$|$$
$$\neg(P(c_0)\vee S(c_0)) \checkmark$$
$$|$$
$$\neg P(c_0)$$
$$|$$
$$\neg S(c_0)$$
$$|$$
$$\neg(P(c_0)\wedge S(c_0)) \checkmark$$
$$\diagup \qquad \diagdown$$
$$\neg P(c_0) \qquad \neg S(c_0)$$

Olkoon $M=\{c_0\}$, $P^M = \emptyset = S^M$.

Tarskin avulla nähdään, että $M\models\forall x_0\neg(P(x_0)\wedge S(x_0))$,

mutta $M\not\models\forall x_0(P(x_0)\vee S(x_0))$.

Siis $\forall x_0\neg(P(x_0)\wedge S(x_0)) \not\Rightarrow \forall x_0(P(x_0)\vee S(x_0))$, ja eheyslauseen nojalla

$$\forall x_0\neg(P(x_0)\wedge S(x_0)) \nvdash \forall x_0(P(x_0)\vee S(x_0))$$

$\square$

23. Ei: Olkoon $\mathcal{M} = \{0,1\}$, $R^{\mathcal{M}} = \{(0,1),(1,0)\}$.

Tällöin kumpikaan alkioista 0 ja 1 ei ole relaatiossa molempiin, joten

$\mathcal{M} \not\models \exists x_0 \forall x_1 R(x_0, x_1)$.

Toisaalta molempiin on relaatiossa jokin alkio, joten

$\mathcal{M} \not\models \exists x_0 \forall x_1 \neg R(x_1, x_0)$

Siis $\mathcal{M} \not\models \exists x_0 \forall x_1 R(x_0, x_1) \vee \exists x_0 \forall x_1 \neg R(x_1, x_0)$

$\mathcal{M}$ kuitenkin toteuttaa kaikki joukon ϕ lauseet, joten

$\phi \not\models \exists x_0 \forall x_1 R(x_0, x_1) \vee \exists x_0 \forall x_1 \neg R(x_1, x_0)$.

Eheyslauseen nojalla

$\phi \not\vdash \exists x_0 \forall x_1 R(x_0, x_1) \vee \exists x_0 \forall x_1 \neg R(x_1, x_0)$.

$\square$