Logiikka 1, Kevät 2012
Kertaustehtäviä 2. kurssikokeeseen
HY Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Koealueeseen kuuluu:

- Mallit ja relaatiot
- Kaavat ja lauseet, totuus
- Isomorfia ja määriteltävyys
- Semanttinen puu, luonnollinen päättely ja eheyslause

1. Määrittele käsitteet

a) n-paikkainen relaatio
b) aakkosto
c) aakkoston L malli.

2. Määritellään reaaliluvuille kaksipaikkainen relaatio R, missä

$$(x, y) \in R \quad \iff \quad x - y \in \mathbb{N}.$$

Tässä $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Osoita, että näin määritelty relaatio on transitiivinen ja refleksiivinen, muttei symmetrinen.

3. Anna esimerkki joukosta X ja sen kaksipaikkaisesta relaatiosta R, joka

a) on symmetrinen ja antisymmetrinen
b) ei ole symmetrinen eikä antisymmetrinen.

4. Olkoot R ja S symmetrisiä relaatioita. Osoita, että $R \cup S$ ja $R \cap S$ ovat symmetrisiä relaatioita.

5. Mitkä seuraavista kaavoista ovat lauseita?

a) $\forall x_2 P(x_0)$
b) $x_0 = x_0 \wedge \neg x_0 = x_0$
c) $\forall x_0 \forall x_0 (P(x_1) \to x_1 = x_0)$
d) $\forall x_0 \forall x_1 \exists x_2 (P(x_0) \to R(x_0, x_2))$
e) $\exists x_1 P(x_1) \wedge \exists x_0 R(x_0, x_1)$

6. Tutkitaan aakkoston $L = \{P, R\}$ mallia $\mathcal{M}$, missä

$$\begin{aligned} &\mathcal{M} = \mathbb{N} \\ &P^{\mathcal{M}} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} \\ &R^{\mathcal{M}} = \{(n, n+3) : n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Olkoon s jokin tulkintajono, jolla $s(x_0) = 2$, $s(x_1) = 7$ ja $s(x_2) = 4$. Päteekö väite? Perustele.

a) $\mathcal{M} \models_s R(x_1, x_2)$
b) $\mathcal{M} \models_s P(x_0) \to R(x_2, x_1)$
c) $\mathcal{M} \models_s \neg P(x_1) \wedge P(x_0) \wedge \neg P(x_2)$

7. Olkoot $\mathcal{M}$ ja s kuten edellisessä tehtävässä. Päteekö väite? Perustele.

a) $\mathcal{M} \models_s \exists x_2 \neg P(x_2)$
b) $\mathcal{M} \models_s \exists x_1 R(x_1, x_0)$
c) $\mathcal{M} \models_s \exists x_1 R(x_1, x_2)$
d) $\mathcal{M} \models_s \exists x_0 \exists x_1 (P(x_0) \wedge R(x_1, x_0))$

8. Olkoon $\mathcal{G} = \left(G, E^{\mathcal{G}}\right)$ verkko ja $s\colon \{x_0, x_1, \ldots\} \to G$ mielivaltainen tulkintajono. Osoita, että $\mathcal{G}$ toteuttaa tulkintajonolla s lauseen

a) $\forall x_0 \neg E(x_0, x_0)$
b) $\forall x_0 \forall x_1 (E(x_0, x_1) \to E(x_1, x_0))$

9. Määrittele käsitteet

a) isomorfismi
b) isomorfiset mallit
c) automorfismi.

10. Ovatko seuraavat kuvaukset mallin $\left(\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}}\right)$ automorfismeja? Perustele.

a) $x \mapsto x + 1$
b) $x \mapsto e^x$
c) $x \mapsto -x$

11. Olkoot $\mathcal{G}_1$ ja $\mathcal{G}_2$ verkkoja, joilla

$$\begin{aligned}
&G_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
&E^{\mathcal{G}_1} = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,1), (3,1), (3,4), (4,3), (5,1)\} \\
&G_2 = \{A, B, C, D, E\} \\
&E^{\mathcal{G}_2} = \{(A,D), (B,D), (B,E), (C,D), (D,A), (D,B), (D,C), (E,B)\}.
\end{aligned}$$

Osoita, että verkot $\mathcal{G}_1$ ja $\mathcal{G}_2$ ovat isomorfiset.

12. Olkoon $L = \{R\}$ ja $\mathcal{M}_1$ sekä $\mathcal{M}_2$ L-malleja, joiden molempien universumina on kokonaislukujen joukko ja

$$\begin{aligned}
(n, m) \in R^{\mathcal{M}_1} \quad &\Longleftrightarrow \quad n + 1 = m \\
(n, m) \in R^{\mathcal{M}_2} \quad &\Longleftrightarrow \quad n - 1 = m.
\end{aligned}$$

Piirrä kuva molemmista malleista ja osoita, että ne ovat isomorfiset.

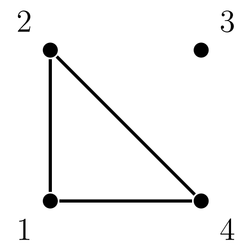
13. Olkoon $L = \{<\}$, $\mathcal{M}_1 = [0, \infty[$ ja $\mathcal{M}_2 =]-\infty, 0]$ L-malleja, joissa kummassakin symbolin $<$ tulkinta on reaalilukujen tavallinen järjestys. Osoita, että mallit eivät ole isomorfiset.

14. Määrittele käsite *mallin määriteltävä osajoukko*.

15. Olkoon $\mathcal{M}$ aakkoston $L = \{P, S, R\}$ malli, $\#P = \#S = 1$ ja $\#R = 2$. Osoita, että seuraavat joukot ovat määriteltäviä.

a) $S^{\mathcal{M}}$
b) $P^{\mathcal{M}} \setminus S^{\mathcal{M}}$
c) niiden alkioiden x, joilla $(x, x) \in R^{\mathcal{M}}$, muodostama joukko
d) niiden alkioiden x, jotka ovat relaatiossa $R^{\mathcal{M}}$ johonkin muuhun alkioon kuin itseensä, muodostama joukko
e) niiden alkioiden x, jotka ovat relaatiossa $R^{\mathcal{M}}$ johonkin joukossa $P^{\mathcal{M}}$ olevaan alkioon.

16. Olkoon $\mathcal{G}$ verkko



Osoita, että joukot $\emptyset$, $\mathcal{G}$, $\{1, 2, 4\}$ ja $\{3\}$ ovat määriteltäviä.

17. Osoita, ettei edellisen tehtävän verkolla ole muita määriteltäviä osajoukkoja kuin mainitut.

18. Laadi semanttinen todistus lauseelle $\neg\exists x_0(\forall x_1 R(x_0, x_1) \wedge \forall x_1 \neg R(x_1, x_0))$.

19. Laadi semanttinen todistus lauseelle $\forall x_0 \exists x_1 R(x_0, x_1)$ oletuksesta $\exists x_1 \forall x_0 R(x_0, x_1)$.

20. Päättele luonnollisella päättelyllä oletuksesta $\forall x_0 \forall x_1 (R(x_0, x_1) \rightarrow (P(x_0) \wedge \neg P(x_1)))$

a) $\forall x_0 \neg R(x_0, x_0)$
b) $\neg\exists x_3 P(x_3) \rightarrow \neg\exists x_0 R(x_0, x_1)$

21. Päättele luonnollisella päättelyllä $\neg\forall x_2 \exists x_3 (P(x_3) \wedge \neg Q(x_2, x_3))$ oletuksesta $\exists x_0 \forall x_1 (P(x_1) \rightarrow Q(x_0, x_1))$.

22. Osoita, että luonnollisella päättelyllä ei voida päätellä lausetta $\forall x_0(P(x_0) \vee S(x_0))$ oletuksesta $\forall x_0 \neg(P(x_0) \wedge S(x_0))$.

23. Voidaanko luonnollisella päättelyllä päätellä lause $\exists x_0 \forall x_1 R(x_0, x_1) \vee \exists x_0 \forall x_1 \neg R(x_1, x_0)$?

24. Tee edellisen vuoden Logiikka I -kurssin laskuharjoitukset 6-11.