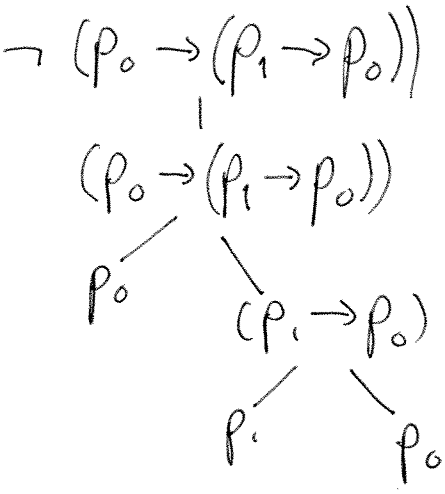
Logiikka I, Kevät 2012

Kertaustehtäviä 1. kurssikokeeseen

Esimerkkiratkaisuja, Kaarlo Reipas.

T1 Löytyy monisteesta.

T2 a)



b)

p_0	p_1	$\neg$	$(p_0$	$\to$	$(p_1$	$\to$	$p_0))$
0	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1

c)

$\neg(p_0 \to (p_1 \to p_0))$ ✓

p_0

$\neg(p_1 \to p_0)$ ✓

p_1

$\neg p_0$

×

T3

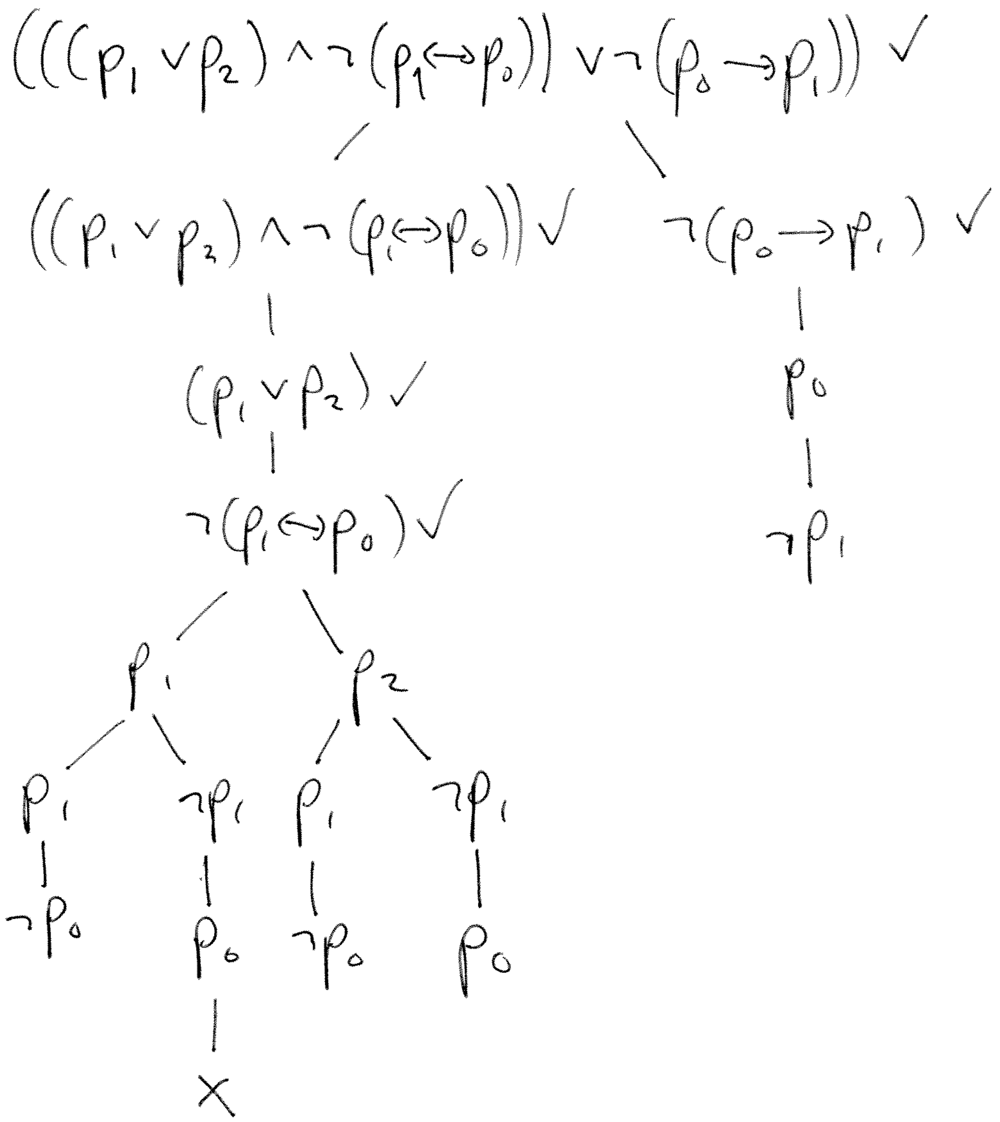
a) $(((p_1 \lor p_2) \land \neg(p_1 \leftrightarrow p_0)) \lor \neg(p_0 \to p_1))$

- $(((p_1 \lor p_2) \land \neg(p_1 \leftrightarrow p_0)) \lor \neg(p_0 \to p_1))$
  - $((p_1 \lor p_2) \land \neg(p_1 \leftrightarrow p_0))$
    - $(p_1 \lor p_2)$
      - p_1
      - p_2
    - $\neg(p_1 \leftrightarrow p_0)$
      - $(p_1 \leftrightarrow p_0)$
        - p_1
        - p_0
  - $\neg(p_0 \to p_1)$
    - $(p_0 \to p_1)$
      - p_0
      - p_1

b)

p_0	p_1	p_2	$(((p_1 \lor p_2)$	$\land$	$\neg(p_1$	$\leftrightarrow p_0))$	$\lor$	$\neg(p_0$	$\to p_1))$
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1	0	0	1

c)



T4 Löytyy monisteesta.

T5 a) Piirretään totuustaulu:

p_0	p_1	p_2	$(((p_0 \to p_1)$	$\wedge$	$(p_0 \to \neg p_2))$	$\to$	$\neg$	$(p_1 \leftrightarrow p_2))$
0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1	0	1

Taulusta nähdään, että lause on kontingent

b) Olkoon $v : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ totuusjakauma, jolla

$$v(n) = \begin{cases} 0, & \text{kun } n = 3 \\ 1, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin $v[\neg p_1] = 0$, joten $v[(\neg p_1 \to p_3)] = 1$.
Lisäksi $v[p_3] = 0$, joten
$v[(\neg(p_1 \to p_2) \wedge p_3))] = 0$, ja siten
$v[\neg(\neg(p_1 \to p_2) \wedge p_3)] = 1$. Siis

$$v[((\neg p_1 \to p_3) \leftrightarrow \neg(\neg(p_1 \to p_2) \wedge p_3))] = 1.$$

Olkoon toisaalta $w : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ totuusjakauma, jolla $w(n) = 0$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

Tällöin $w[\neg p_1] = 1$ ja $w[p_3] = 0$, joten
$w[(\neg p_1 \to p_3)] = 0$. Toisaalta $w[(\neg(p_1 \to p_2) \wedge p_3)] = 0$,
joten $w[\neg(\neg(p_1 \to p_2) \wedge p_3)] = 1$. Siis

$$w[((\neg p_1 \to p_3) \leftrightarrow \neg(\neg(p_1 \to p_2) \wedge p_3))] = 0.$$

Lause on siis kontingentti.

(Tämän voisi toki tehdä myös totuustaululla.)

c) Piirretään totuustaulu:

p_0	$\neg$	$(p_0$	$\to$	$\neg$	$(p_0$	$\to$	$\neg$	$(p_0$	$\to$	$\neg$	$p_0)))$
0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1

Lause on siis kontingentti.

T6

Todistus: Oletetaan, että v on totuusjakauma, joka toteuttaa propositiolauseen $\neg(p_0 \to (p_1 \wedge p_0))$. Totuuden määritelmän nojalla tällöin $v[(p_0 \to (p_1 \wedge p_0))] = 0$.

Tämä voi [redacted] päteä vain jos $v[p_0] = 1$ ja $v[(p_1 \wedge p_0)] = 0$, eli $v[p_1] = 0$. (Jos $v[p_1] = 1$, niin koska $v[p_0] = 1$, $v[(p_1 \wedge p_0)] = 1$.)

Siis $v[\neg p_1] = 1$, eli v toteuttaa lauseen $\neg p_1$.

(Tämän voi lausua muodossa $\neg(p_0 \to (p_1 \wedge p_0)) \Rightarrow \neg p_1$.)

T7

Olkoon v totuusjakauma, jolla $v(n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Tällöin $v[\neg p_1] = 1$, mutta $v[p_0] = 0$, joten $v[(p_0 \to (p_1 \wedge p_0))] = 1$ ja siis $v[\neg(p_0 \to (p_1 \wedge p_0))] = 0$.

(Tämä voidaan lausua muodossa $\neg p_1 \not\Rightarrow \neg(p_0 \to (p_1 \wedge p_0))$.)

T8 Löytyy monisteesta.

T9 Olkoot A, B, C mielivaltaisia propositiolauseita, ja v totuusjakauma, joka toteuttaa lauseen $\neg(C \to A)$. Tällöin v toteuttaa lauseen C, muttei lausetta A.
Koska C toteutuu, niin myös $(B \vee C)$ toteutuu, joten $\neg(B \vee C)$ ei toteudu.
Siis kumpikaan lauseista A ja $\neg(B \vee C)$ ei toteudu, eli

$$v[(A \vee \neg(B \vee C))] = 0,$$

siis

$$v[\neg(A \vee \neg(B \vee C))] = 1.$$

T10 Olkoon v mielivaltainen totuusjakauma.
Tällöin

$$\begin{aligned} v[(p_0 \leftrightarrow p_1)] = 1 &\iff v[p_0] = v[p_1] \\ &\iff v[p_0] = 1 \text{ ja } v[p_1] = 1 \text{ tai } v[p_0] = 0 \text{ ja } v[p_1] = 0 \\ &\iff v[(p_0 \wedge p_1)] = 1 \text{ tai } v[(\neg p_0 \wedge \neg p_1)] = 1 \\ &\iff v[((p_0 \wedge p_1) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1))] = 1. \end{aligned}$$

eli $v[(p_0 \leftrightarrow p_1)] = v[((p_0 \wedge p_1) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1))]$. Siis

$$(p_0 \leftrightarrow p_1) \iff ((p_0 \wedge p_1) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1)).$$

T11

a) Olkoon $A = \neg(\neg p_0 \wedge \neg p_1)$. Millä tahansa v pätee

$$v[A] = 1 \iff v[(\neg p_0 \wedge \neg p_1)] = 0$$

$$\iff \text{joko } v[\neg p_0] = 0 \text{ tai } v[\neg p_1] = 0$$

$$\iff \text{joko } v[p_0] = 1 \text{ tai } v[p_1] = 1$$

$$\iff v[(p_0 \vee p_1)] = 1.$$

Siis $A \Leftrightarrow (p_0 \vee p_1)$.

b) Olkoon $A = \neg(p_0 \wedge \neg p_1)$. Piirretään totuustaulu:

p_0	p_1	$(p_0 \rightarrow p_1)$	$\neg$	$(p_0 \wedge$	$\neg p_1)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0

Huomataan, että $(p_0 \rightarrow p_1) \Leftrightarrow \neg(p_0 \wedge \neg p_1)$.

c) Olkoon v mielivaltainen totuusjakauma. Koska $\{\neg, \wedge\}$ on tunnetusti täydellinen konnektiivijoukko, löytyy lauseiden A, B ja C kanssa ekvivalentit lauseet A', B' ja C', joissa ei esiinny muita konnektiiveja kuin $\neg$, ja $\wedge$.

Jatkuu ...

T11 c) jatkuu...

Nyt $v[(A \wedge (B \vee C))] = 1 \Leftrightarrow v[(A' \wedge (B' \vee C'))] = 1$

$\Leftrightarrow v[A'] = 1$ ja joko $v[B'] = 1$ tai $v[C'] = 1$

$\Leftrightarrow v[A'] = 1$ ja ei päde, että $v[B'] = 0$ ja $v[C'] = 0$.

$\Leftrightarrow v[A'] = 1$ ja $v[\neg(\neg B' \wedge \neg C')] = 1$

$\Leftrightarrow v[(A' \wedge \neg(\neg B' \wedge \neg C'))] = 1$.

Siis lause $(A' \wedge \neg(\neg B' \wedge \neg C'))$ ~~on kuten~~ toteuttaa halutut vaatimukset.

d) Piirtämällä totuustaulut

A	B	C	$(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$	
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

$\neg(\neg(A' \wedge \neg(\neg(B' \wedge C') \wedge \neg(\neg B' \wedge \neg C'))) \wedge \neg(\cancel{A} A' \wedge (\neg(B' \wedge C') \wedge \neg(\neg B' \wedge \neg C'))))$

A'	B'	C'	¬																					
0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0

Jatkuu...

T11 d) Jatkuu...

Valitsemalla lauseet A', B' ja C' kuten c)-kohdassa, nähdään, että lause

$$\neg(\neg(A' \wedge \neg(\neg(B' \wedge C') \wedge \neg(\neg B' \wedge \neg C'))) \wedge \neg(\neg A' \wedge (\neg(B' \wedge C') \wedge \neg(\neg B' \wedge \neg C'))))$$

toteuttaa halutut ehdot.

T12 a) Tutkimalla totuustaulua

p_0	p_1	$(p_0 \vee p_1)$	$\neg p_0$	$(\neg p_0 \rightarrow p_1)$
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	0	1

Huomataan, että $(p_0 \vee p_1) \Leftrightarrow (\neg p_0 \rightarrow p_1)$, joten lause $(\neg p_0 \rightarrow p_1)$ kelpaa.

b) Totuustaulusta

p_0	p_1	$(p_0 \wedge p_1)$	$\neg(p_0 \rightarrow \neg p_1)$	$(p_0 \rightarrow \neg p_1)$	$\neg p_1$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0

nähdään, että $(p_0 \wedge p_1) \Leftrightarrow \neg(p_0 \rightarrow \neg p_1)$.

Siis lause $\neg(p_0 \rightarrow \neg p_1)$ toteuttaa vaaditut ehdot.

T12c) Totuustaulun

p_0	p_1	$(p_0 \to p_1)$	$\neg$	$((p_0 \to p_1)$	$\to$	$\neg$	$(p_1 \to p_0))$
0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	0	1

perusteella $(p_0 \leftrightarrow p_1) \Leftrightarrow \neg((p_0 \to p_1) \to \neg(p_1 \to p_0))$.
Lisäksi lauseessa $\neg((p_0 \to p_1) \to \neg(p_1 \to p_0))$ ei esiinny muita konnektiivejä kuin $\neg$ ja $\to$, joten se toteuttaa halutut ehdot.

d) Taulun

p_1	p_2	p_3	$(p_1 \vee$	$(p_2 \wedge p_3))$	$((p_2 \to$	$\neg p_3)$	$\to p_1)$
0	0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1

perusteella lause

$((p_2 \to \neg p_3) \to p_1)$ toteuttaa halutut

vaatimukset.

T12 e) Tutkimalla totuustaulua

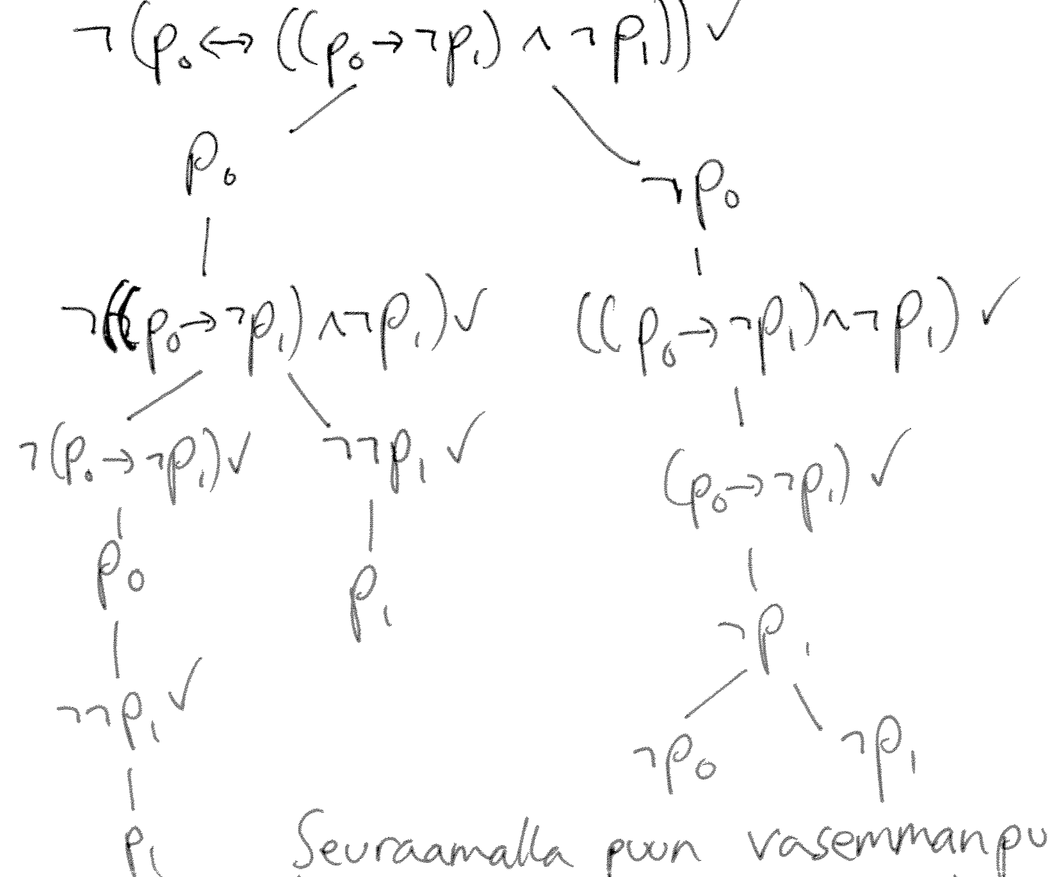
p_0	p_2	p_3	$((p_0 \wedge \neg p_2)$		$\leftrightarrow p_3)$	$\neg$	$(((\neg(p_0 \to p_2) \to p_3) \to \neg(p_3 \to \neg(p_0 \to p_2)))$							
0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1

nähdään, että lause

$$\neg((\neg(p_0 \to p_2) \to p_3) \to \neg(p_3 \to \neg(p_0 \to p_2)))$$

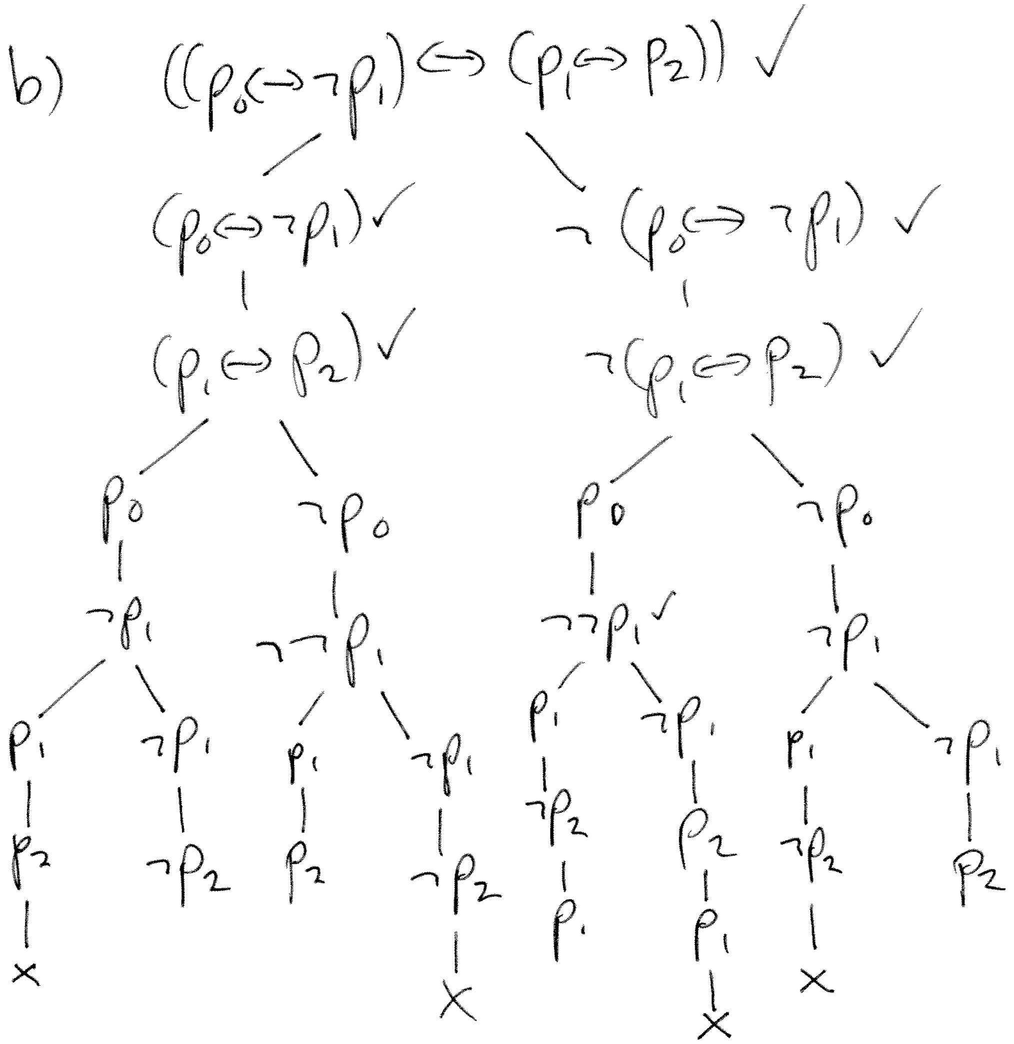
toteuttaa halutut ehdot.

T13 a) Piirretään lauseelle semanttinen puu:



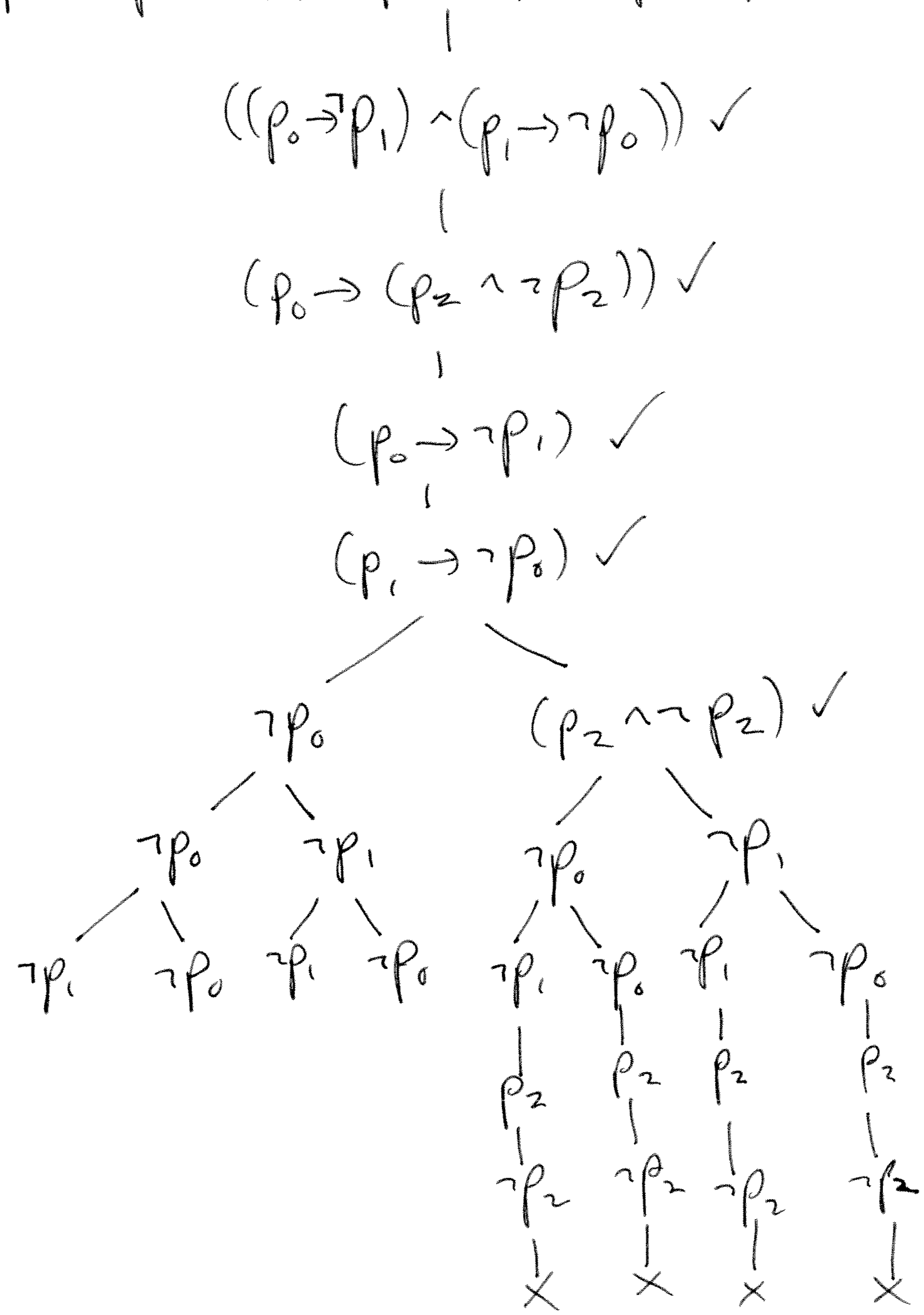
Seuraamalla puun vasemmanpuoleista oksaa, nähdään, että esimerkiksi jakauma v, $v(n)=1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, toteuttaa lauseen.

T13 b)



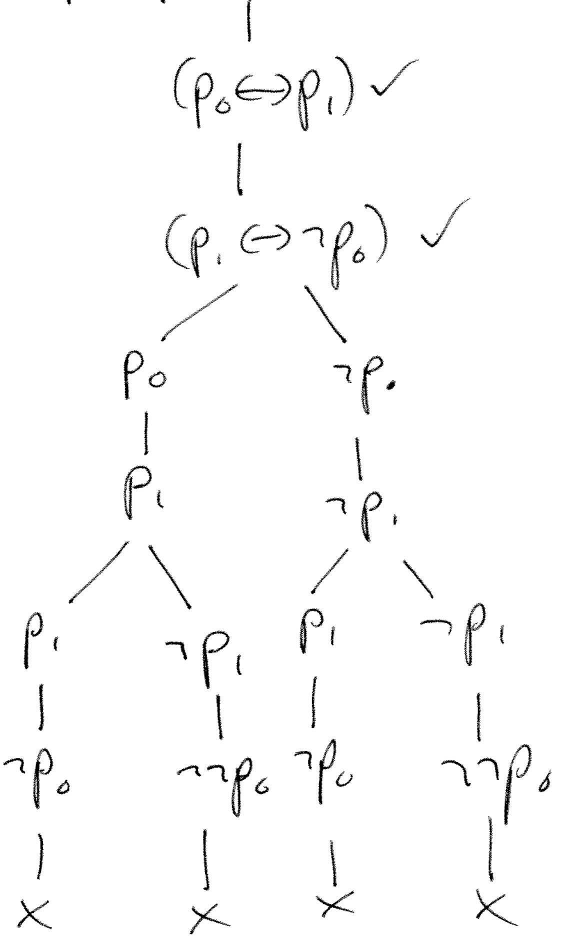
Seuraamalla esimerkiksi oikeanpuoleisinta haaraa, huomataan, että totuusjakauma v, missä $v(0)=0$, $v(1)=0$ ja $v(n)=1$ muilla $n \in \mathbb{N}$, toteuttaa lauseen.

T13 c) $(((p_0 \to \neg p_1) \wedge (p_1 \to \neg p_0)) \wedge (p_0 \to (p_2 \wedge \neg p_2)))$ ✓



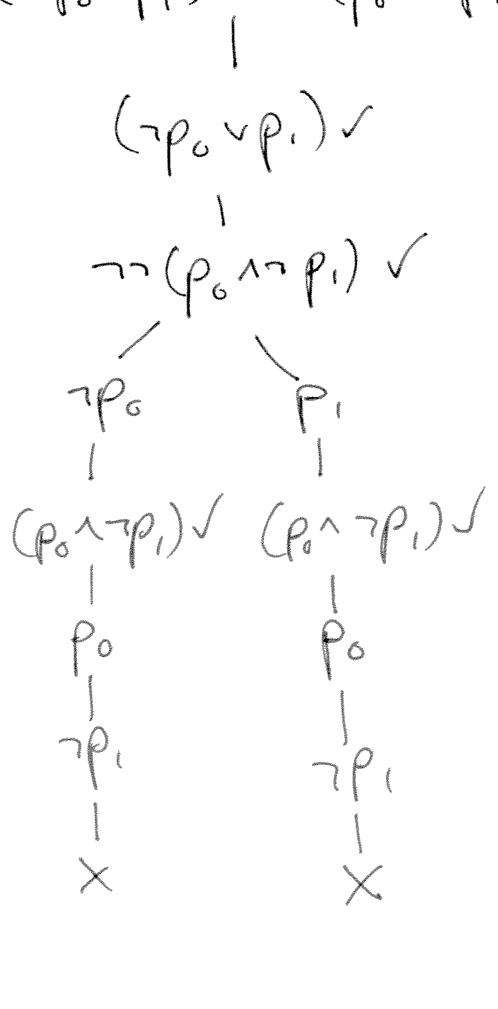
Esimerkiksi totuusjakauma v, $v(n)=0$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, toteuttaa lauseen.

T14 a) $((p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge (p_1 \leftrightarrow \neg p_0))$ ✓



Koska puun jokainen haara sulkeutuu, ei lause voi toteutua millään jakaumalla. Siis se on ristiriita.

b) $\neg((\neg p_0 \vee p_1) \rightarrow \neg(p_0 \wedge \neg p_1))$ ✓



Koska jokainen haara sulkeutuu, lause on ristiriita.

T14 c) $\neg((\neg p_3 \leftrightarrow \neg p_2) \to (p_3 \vee \neg p_3))$ ✓

$(\neg p_3 \leftrightarrow \neg p_2)$ ✓

$\neg(p_3 \vee \neg p_3)$ ✓

$\neg p_3$	$\neg\neg p_3$
$\neg p_2$	$\neg\neg p_2$
$\neg p_3$	$\neg p_3$
$\neg\neg p_3$	$\neg\neg p_3$
×	×

Koska puun jokainen haara sulkeutuu, lause on ristiriita.

T15

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{(p_0 \wedge p_2)}{p_0}\wedge E \qquad [(p_0 \to (p_1 \wedge \neg p_2))]^1}{(p_1 \wedge \neg p_2)}\to E}{\neg p_2}\wedge E \qquad \cfrac{(p_0 \wedge p_2)}{p_2}\wedge E}{(p_2 \wedge \neg p_2)}\wedge I}{\neg(p_0 \to (p_1 \wedge \neg p_2))}\neg I, 1$$

T16

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\neg p_0 \wedge \neg p_1)}{\neg p_0}\wedge E \qquad [p_0]^1}{(p_0 \wedge \neg p_0)}\wedge I}{\neg\neg p_1}\neg I}{p_1}\neg E \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[p_1]^1 \qquad \dfrac{(\neg p_0 \wedge \neg p_1)}{\neg p_1}\wedge E}{(p_1 \wedge \neg p_1)}\wedge I}{\neg\neg p_0}\neg I}{p_0}\neg E}{(p_0 \leftrightarrow p_1)}\leftrightarrow I, 1$$

~~T17~~

$$\cancel{\dfrac{(\neg A \vee B) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad [\neg A]^2}{(A \wedge \neg A)}\wedge I}{\neg\neg B}\neg I}{B}\neg E}{(A \to B)}\to I,1 \qquad \dfrac{[B]^2}{(A \to B)}\to I}{(A \to B)}\vee E, 2}$$

$$\cancel{((\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \to B))}$$

T17

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[(\neg A \vee B)]^5$}
\AxiomC{$[A]^1$}
\AxiomC{$[\neg A]^2$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$(A \wedge \neg A)$}
\RightLabel{$\neg I$}
\UnaryInfC{$\neg\neg B$}
\RightLabel{$\neg E$}
\UnaryInfC{B}
\RightLabel{$\to I, 1$}
\UnaryInfC{$(A \to B)$}
\AxiomC{$[B]^2$}
\RightLabel{$\to I$}
\UnaryInfC{$(A \to B)$}
\RightLabel{$\vee E, 2$}
\TrinaryInfC{$(A \to B)$}
\AxiomC{$[A]^3$}
\AxiomC{$[(A \to B)]^5$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{B}
\RightLabel{$\vee I$}
\UnaryInfC{$(\neg A \vee B)$}
\AxiomC{$[\neg(\neg A \vee B)]^4$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$((\neg A \vee B) \wedge \neg(\neg A \vee B))$}
\RightLabel{$\neg I, 3$}
\UnaryInfC{$\neg A$}
\RightLabel{$\vee I$}
\UnaryInfC{$(\neg A \vee B)$}
\AxiomC{$[\neg(\neg A \vee B)]^4$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$((\neg A \vee B) \wedge \neg(\neg A \vee B))$}
\RightLabel{$\neg I, 4$}
\UnaryInfC{$\neg\neg(\neg A \vee B)$}
\RightLabel{$\neg E$}
\UnaryInfC{$(\neg A \vee B)$}
\RightLabel{$\leftrightarrow I, 5$}
\BinaryInfC{$((\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \to B))$}
\end{prooftree}
$$

T18

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))]^3$}
\AxiomC{$[(A \wedge B)]^2$}
\RightLabel{$\wedge E$}
\UnaryInfC{B}
\AxiomC{$[(A \wedge B)]^2$}
\RightLabel{$\wedge E$}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{$\leftrightarrow I$}
\BinaryInfC{$(A \leftrightarrow B)$}
\AxiomC{$[A]^1$}
\AxiomC{$[(\neg A \wedge \neg B)]^2$}
\RightLabel{$\wedge E$}
\UnaryInfC{$\neg A$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$(A \wedge \neg A)$}
\RightLabel{$\neg I$}
\UnaryInfC{$\neg\neg B$}
\RightLabel{$\neg E$}
\UnaryInfC{B}
\AxiomC{$[B]^1$}
\AxiomC{$[(\neg A \wedge \neg B)]^2$}
\RightLabel{$\wedge E$}
\UnaryInfC{$\neg B$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$(B \wedge \neg B)$}
\RightLabel{$\neg I$}
\UnaryInfC{$\neg\neg A$}
\RightLabel{$\neg E$}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{$\leftrightarrow I, 1$}
\BinaryInfC{$(A \leftrightarrow B)$}
\RightLabel{$\vee E, 2$}
\TrinaryInfC{$(A \leftrightarrow B)$}
\RightLabel{$\to I, 3$}
\UnaryInfC{$(((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \to (A \leftrightarrow B))$}
\end{prooftree}
$$

T19 Ks. moniste.

T20 Olkoon v totuusjakauma, jolla $v(n)=1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $v[(p_0 \leftrightarrow p_1)] = 1$, mutta $v[(\neg p_0 \wedge \neg p_1)] = 0$. Siis $(p_0 \leftrightarrow p_1) \not\Rightarrow (\neg p_0 \wedge \neg p_1)$, joten eheyslauseen nojalla $(p_0 \leftrightarrow p_1) \nvdash (\neg p_0 \wedge \neg p_1)$.

T21

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2 \quad (A \to (B \vee C))}{(B \vee C)}\,{\scriptstyle \to E}}{}\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^1 \quad \neg B}{(B \wedge \neg B)}}{\neg\neg C}\,{\scriptstyle \neg I}}{C}\,{\scriptstyle \neg E}
\quad [C]^1}{C}\,{\scriptstyle \vee E, 1}
}{(A \to C)}\,{\scriptstyle \to I, 2}
$$

T22

$$
\dfrac{
\dfrac{[p_0]^1 \quad (p_0 \to p_1)}{p_1}\,{\scriptstyle \to E}
\qquad
\dfrac{\dfrac{[p_1]^1 \quad (p_1 \to p_2)}{p_2}\,{\scriptstyle \to E} \quad (p_2 \to p_0)}{p_0}\,{\scriptstyle \to E}
}{(p_0 \leftrightarrow p_1)}\,{\scriptstyle \leftrightarrow I, 1}
$$

T23. Olkoon v totuusjakauma, jolla $v(n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$v[(p_0 \to \neg p_1)] = 1$, koska $v[p_0] = 0$, ja
$v[(\neg p_1 \to \neg p_0)] = 1$, koska $v[\neg p_1] = 1$.

Kuitenkin $v[(p_0 \leftrightarrow \neg p_1)] = 0$, joten lause $(p_0 \leftrightarrow \neg p_1)$ ei ole lauseiden $(p_0 \to \neg p_1)$ ja $(\neg p_1 \to \neg p_0)$ looginen seuraus. Eheyslauseen nojalla sitä ei voida päätellä näistä oletuksista.

T24 Olkoon v kuten edellisessä tehtävässä. Tällöin $v[p_1] = v[p_2] = v[p_3]$, joten $v[(p_1 \leftrightarrow p_2)] = 1$ ja $v[(p_2 \leftrightarrow p_3)] = 1$.
Kuitenkin $v[(p_2 \leftrightarrow p_3)] = 1 \neq 0 = v[p_1]$, joten $v[(p_1 \leftrightarrow (p_2 \leftrightarrow p_3))] = 0$. Siis $(p_1 \leftrightarrow (p_2 \leftrightarrow p_3))$ ei ole lauseiden $(p_1 \leftrightarrow p_2)$ ja $(p_2 \leftrightarrow p_3)$ looginen seuraus, joten eheyslauseen nojalla

$$\{(p_1 \leftrightarrow p_2), (p_2 \leftrightarrow p_3)\} \nvdash (p_1 \leftrightarrow (p_2 \leftrightarrow p_3))$$