Logiikka I, kevät 2012, 2. kurssikoe
Esimerkkiratkaisuja.

1. a) $\forall x_0 (B(x_0) \to \exists x_1 (R(x_1) \wedge x_1 < x_0))$

b) $\exists x_0 \exists x_1 (\neg x_0 = x_1 \wedge R(x_0) \wedge R(x_1))$

2. Tehtävän mallista löytyy alkio 0, jota pienempi mikään muu alkio ei ole.

Olkoon $b \in M$, ja olkoon s jokin tulkintajono.

Nyt millään $b \in M$ ei päde

$$b < 0$$

$\Rightarrow$ millään $b \in M$ ei päde

$$\cancel{s(b/x_1)(x_1) < s(0/x_0)(x_0)} \quad s(0/x_0)(b/x_1)(x_1) < s(0/x_0)(b/x_1)(x_0)$$

$\Rightarrow$ millään $b \in M$

$$M \not\models_{s(0/x_0)(b/x_1)} x_1 < x_0$$

$\Rightarrow$ Ei löydy sellaista $b \in M$, että

$$M \models_{s(0/x_0)(b/x_1)} x_1 < x_0$$

$$\Rightarrow M \models_{s(0/x_0)} \neg \exists x_1 (x_1 < x_0)$$

$$\Rightarrow M \models_s \exists x_0 \neg \exists x_1 (x_1 < x_0).$$

3. $\{\exists x_0 P(x_0),\ \forall x_0 \forall x_1 (P(x_0) \leftrightarrow Q(x_1))\} \vdash \forall x_1 Q(x_1)$

$$\dfrac{\dfrac{\exists x_0 P(x_0) \qquad \dfrac{[P(x_0)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x_0 \forall x_1 (P(x_0) \leftrightarrow Q(x_1))}{\forall x_1 (P(x_0) \leftrightarrow Q(x_1))}\ \forall E}{P(x_0) \leftrightarrow Q(x_1)}\ \forall E}{Q(x_1)}\ \leftrightarrow E}{Q(x_1)}\ \exists E, 1}{\forall x_1 Q(x_1)}\ \forall I$$

4. b) Olkoon π mallin M automorfismi,

$\pi(1) = 2$

$\pi(2) = 1$

$\pi(3) = 4$

$\pi(4) = 3$

$\pi(5) = 6$

$\pi(6) = 5$

Kuvaus π on selvästi automorfismi, sillä se on selvästi bijektio ja

$(1,3) \in R^M \Leftrightarrow (\pi(1), \pi(3)) \in R^M$

$(2,4) \in R^M \Leftrightarrow (\pi(2), \pi(4)) \in R^M$

$(4,6) \in R^M \Leftrightarrow (\pi(4), \pi(6)) \in R^M$

$(3,5) \in R^M \Leftrightarrow (\pi(3), \pi(5)) \in R^M$

eli π säilyttää relaation R.

Jos joukko B olisi määriteltävä, tulisi olla

$\pi(1), \pi(3), \pi(5) \in B$, sillä automorfismit säilyttävät määriteltävät relaatiot.

Kuitenkin esimerkiksi $\pi(1) = 2 \notin B$.

Siis B ei ole määriteltävä.

4\. a) Olkoon φ kaava $\forall x_1 \neg R(x_1, x_0)$.

Olkoon $a \in M$. Tällöin

$\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} \varphi$

$\iff \mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} \forall x_1 \neg R(x_1, x_0)$

$\iff$ kaikilla $b \in M$: $\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)(b/x_1)} \neg R(x_1, x_0)$

$\iff$ kaikilla $b \in M$: $\mathcal{M} \not\models_{s(a/x_0)(b/x_1)} R(x_1, x_0)$

$\iff$ kaikilla $b \in M$: $(s(a/x_0)(b/x_1)(x_1), s(a/x_0)(b/x_1)(x_0)) \notin R^{\mathcal{M}}$

$\iff$ kaikilla $b \in M$: $(b, a) \notin R^{\mathcal{M}}$

$\iff$ ei ole sellaista $b \in M$, jolla $(b, a) \in R^{\mathcal{M}}$.

$\iff$ mikään alkio ei ole relaatiossa $R^{\mathcal{M}}$ alkioon a

$\iff a \in \{1, 2\}$.

Siis kaava φ määrittelee joukon $\{1, 2\}$.