Logiikka 1, Kevät 2012
Harjoitus 9
Palautuspäivä 30.3.
HY Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Seuraavat tehtävät liittyvät isomorfismeihin ja isomorfiaan (Luku 3.5. materiaalissa).

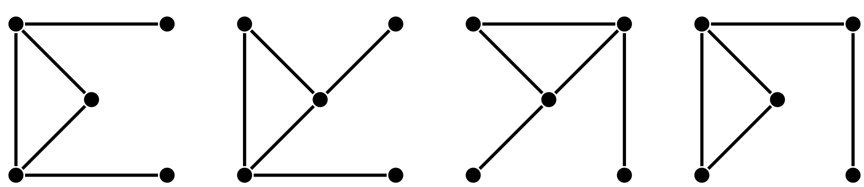
1. Olkoon $\mathcal{M}$ malli, ja φ_A, φ_B ja φ_C kaavoja, jotka määrittelevät joukot A, B ja C. Anna jokin kaava, joka määrittelee joukon

a) $A \cup B \cup C$
b) $A \cap B \cap C$
c) $\mathcal{M} \setminus (A \cap (B \setminus C))$
d) $(C \setminus B) \cap (B \setminus A)$.

2. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathcal{M}$ määriteltäviä. Osoita induktiolla luvun n suhteen, että yhdiste $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ on määriteltävä. Osoita esimerkiksi de Morganin kaavojen avulla, että sama pätee leikkaukselle $A_1 \cap \ldots \cap A_n$.

3. Lue materiaalin kappale isomorfiasta. Ota selvää, miten voidaan osoittaa, että jokin mallin osajoukko ei ole määriteltävä. Tehtävään ei tarvitse vastata mitään.

4. Seuraavista verkoista kolme ovat keskenään isomorfisia. Mitkä niistä?



5. Olkoon $L = \{<\}$, ja olkoot $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ ja $\mathcal{N} = \{r \in \mathbb{R} \colon r > 1\}$ L-malleja, joissa kummassakin symbolin $<$ tulkinta on joukon tavanomainen järjestys. Osoita tutkimalla kuvausta $f \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $f(x) = 1 + \mathrm{e}^x$, että mallit $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ ovat isomorfiset.

$*$**6.** Olkoon $\mathcal{M} = \{1, 2, 3\}$, $<^{\mathcal{M}} = \{(1,2), (1,3), (3,2)\}$ ja olkoon $\mathcal{N} = \{\eth, \aleph, \backepsilon\}$, $<^{\mathcal{N}} = \{(\eth, \backepsilon), (\aleph, \backepsilon), (\eth, \aleph)\}$. Osoita, että mallit $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ ovat isomorfisia.

7. Osoita, että mitkä tahansa kaksi kolmen alkion lineaarijärjestystä ovat keskenään isomorfiset.

8. Anna esimerkki kahdesta kolmen alkion osittaisjärjestyksestä, jotka eivät ole isomorfisia. Perustele.

9. Osoita, että $\{<\}$-mallit $\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Q}$ eivät ole isomorfiset.
Vinkki: Materiaalissa osoitetaan, että järjestetyt joukot $\mathbb{N}$ *ja* $\mathbb{Z}$ *eivät ole isomorfiset. Voit mukailla tätä todistusta.*

$*$**10.** Olkoon $L = \{<\}$, $\mathbb{R}$ reaalilukujen järjestetty malli ja $a > 0$ ja $b \in \mathbb{R}$ vakioita. Osoita, että kuvaus $x \mapsto ax + b$ on mallin $\mathbb{R}$ automorfismi. Osoita, että jos $a < 0$, niin samaisella kaavalla määritelty kuvaus ei ole automorfismi.

11. Osoita edellisen tehtävän avulla, että positiivisten reaalilukujen joukko ei ole määriteltävä mallissa $\left(\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}}\right)$. Jos haluat lisähaastetta, voit osoittaa, että mikään muu joukko kuin $\emptyset$ ja $\mathbb{R}$ ei ole määriteltävä.

12. Osoita, että luonnollisten lukujen järjestetyllä joukolla $\left(\mathbb{N}, <^{\mathbb{N}}\right)$ ei ole muita automorfismeja kuin identtinen kuvaus.

Vinkki: Lähde liikkeelle näin: Oleta, että f on mallin $\mathbb{N}$ automorfismi. Todista induktiolla, että $f(n) = n$ jokaisella n, tai vaihtoehtoisesti tee vastaoletus, ja käytä tietoa siitä, että jokaisella luonnollisten lukujen epätyhjällä osajoukolla on pienin alkio.

$*$**13.** Olkoon $\mathcal{G} = \left(\mathcal{G}, E^{\mathcal{G}}\right)$ verkko, jossa

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G} = \{1, 2, 3, 4\} \\
&E^{\mathcal{G}} = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,4), (3,1), (4,1), (4,2)\}
\end{aligned}$$

Etsi jokin verkon $\mathcal{G}$ osajoukko, joka ei ole määriteltävä. Perustele huolellisesti.

14. Milloin tyhjän aakkoston $L = \emptyset$ mallit ovat isomorfiset?

15. Tee seuraavista tehtävistä mielenkiintoisin.

Algebran kurssilaisille. Olkoon $L = \{K\}$, missä $\#K = 3$. Olkoon G ryhmä. Tehdään ryhmästä G L-malli niin, että

$$(a, b, c) \in K^G \qquad \Longleftrightarrow \qquad ab = c.$$

Osoita, että

a) neutraalialkion yksiö
b) niiden alkioiden, jotka ovat itsensä käänteisalkioita, muodostama joukko

on määriteltävä.

Tietojenkäsittelijöille. Olkoon $L = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, <\}$, missä $\mathtt{0}$ ja $\mathtt{1}$ ovat 1-paikkaisia relaatioita. Bittijono b, jonka pituus on n, voidaan koodata L-malliksi $\mathcal{M}$ niin, että mallin alkiot ovat luvut $1, 2, \ldots, n$, järjestys $<^{\mathcal{M}}$ on näiden tavallinen järjestys ja

$$\begin{aligned}
&\mathtt{0}^{\mathcal{M}} = \{k \in \{1, \ldots, n\} : \text{merkkijonon } b \ k\text{:s jäsen on } 0\} \\
&\mathtt{1}^{\mathcal{M}} = \{k \in \{1, \ldots, n\} : \text{merkkijonon } b \ k\text{:s jäsen on } 1\}.
\end{aligned}$$

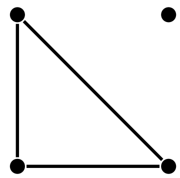
Esimerkiksi bittijonoa 100 vastaava malli olisi $\mathcal{M} = \{1, 2, 3\}$, $\mathtt{0}^{\mathcal{M}} = \{2, 3\}$, $\mathtt{1}^{\mathcal{M}} = \{1\}$ ja

$$<^{\mathcal{M}} = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}.$$

(Siis vähän kuin laattamalli.)
Laadi kielen L lause, joka on totta bittijonosta muodostetussa mallissa, jos ja vain jos

a) bittijono on epätyhjä ja alkaa merkillä 0
b) bittijonossa on alijonona 01.

Muille. Etsi verkkojen aakkoston $L = \{E\}$ lause, joka on totta verkossa jos ja vain jos verkko on isomorfinen verkon



kanssa.