Logiikka 1, Kevät 2012
Harjoitus 8
Palautuspäivä 23.3.
HY Matematiikan ja tilastotieteen laitos

1. Osoita, että kaava $\forall x(P(x) \wedge T(x))$ on kaavan $\forall x P(x) \wedge \forall x T(x)$ looginen seuraus.

2. Osoita, että kaava $\exists x(P(x) \wedge T(x))$ ei ole kaavan $\exists x P(x) \wedge \exists x T(x)$ looginen seuraus.

3. Olkoot φ, ψ ja θ L-kaavoja. Osoita totuuden määritelmää käyttäen, että jos $\varphi \Rightarrow \psi$ ja $\psi \Rightarrow \theta$, niin $\varphi \Rightarrow \theta$.

4. Mitkä muuttujat esiintyvät vapaina seuraavissa aakkoston $L = \{P, R\}$ ($\#P = 1$, $\#R = 2$) kaavoissa?

a) $\forall x_0 P(x_0) \vee \exists x_1 \exists x_1 \exists x_1 \exists x_1 (x_1 = x_1)$
b) $x_0 = x_0 \to \exists x_0 (\neg x_0 = x_0)$
c) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge \neg x_1 = x_3)$
d) $\exists x_5 (\forall x_5 (P(x_5) \vee P(x_5)) \leftrightarrow x_5 = x_5)$
e) $\forall x_1 P(x_1) \to x_2 = x_3$

5. Mitkä seuraavista aakkoston $L = \{P, R\}$ kaavoista ovat lauseita?

a) $\exists x_0 (x_0 = x_0 \vee x_1 = x_1)$
b) $\forall x_0 \exists x_1 ((\neg x_0 = x_1 \leftrightarrow R(x_1, x_1)) \to R(x_0, x_1))$
c) $\forall x_0 P(x_0) \vee \exists x_0 \neg P(x_0)$
d) $\exists x_1 (\forall x_0 P(x_0) \to x_0 = x_0)$

$*$**6.** Kirjoita lyhyt ja ytimekäs essee lauseiden ja kaavojen totuudesta. Selitä muun muassa miksi merkintä $\mathcal{M} \models \varphi$ on järkevä, jos φ on lause, muttei muussa tapauksessa.

7. Olkoon $L = \{P\}$ aakkosto ja P yksipaikkainen relaatiosymboli. Osoita, että kaava $\exists x_0 \exists x_1 (\neg x_0 = x_1)$ on kaavan $\exists x_0 P(x_0) \wedge \exists x_1 \neg P(x_1)$ looginen seuraus.

8. Olkoon $L = \{R\}$, $\#R = 2$. Osoita huolellisesti Tarskin totuusmääritelmän avulla, jos $\mathcal{M} \models \forall x_0 \forall x_1 (R(x_0, x_1) \to \neg R(x_1, x_0))$, niin $R^{\mathcal{M}}$ on irrefleksiivinen ja antisymmetrinen relaatio.

9. Kokeessa opiskelijat A ja B formalisoivat väitteen *jollakin miehellä on pitkät hiukset* seuraavasti:

$$A\colon \exists x(M(x) \wedge P(x))$$
$$B\colon \exists x(M(x) \to P(x))$$

Symboli M siis nimeää ominaisuutta *olla mies* ja P ominaisuutta *olla pitkähiuksinen.* Tarkastele näiden lauseiden totuutta mallissa $S = \big(\{1, 2, 3\}, M^S, P^S\big)$, missä $M^S = \{3\}$ ja $P^S = \{2\}$. Kumpi formalisointi on oikein?

10. Kirjoita aakkoston $L = \{B, R, Y, <\}$ lause, joka ilmaisee annetun ominaisuuden laattamallissa. Perusteluja ei tarvita.

a) minkään punaisen laatan oikealla puolella ei ole sinistä laattaa
b) mallissa on kolmenvärisiä laattoja
c) kaikki laatat ovat samanvärisiä
d) on olemassa kaksi vierekkäistä keltaista laattaa

$*$**11.** Olkoon $\mathcal{M}$ laattamalli ja $a \in \mathcal{M}$ laatta. Osoita huolellisesti suoraan totuuden määritelmästä, että

$$\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} \exists x_1 \exists x_2 (x_1 \neq x_2 \wedge B(x_1) \wedge B(x_2) \wedge x_0 < x_1 \wedge x_0 < x_2)$$

jos ja vain jos laatan a oikealla puolella on vähintään kaksi sinistä laattaa. Osoita ”jos” ja ”vain jos” -kohdat erikseen.

Huom. Annettu kaava määrittelee niiden laattojen joukon, joiden oikealla puolella on vähintään kaksi sinistä laattaa.

12. Verkon $\left(\mathcal{G}, E^{\mathcal{G}}\right)$ pisteet a, b ja c muodostavat kolmion, mikäli $\{(a,b),(b,c),(a,c)\} \subset E^{\mathcal{G}}$. Osoita, että niiden verkon niiden pisteiden, jotka ovat osana jotakin kolmiota, muodostama joukko on määriteltävä. Pelkän kaavan antaminen riittää.

$*$**13.** Kirjoita laattamallien aakkoston kaava, jossa on vapaana muuttuja x_0, eikä muita, ja joka ilmaisee annetun ominaisuuden. a) -kohta on tehty puolestasi.

a) x_0 on punainen tai keltainen
Ratkaisu. $R(x_0) \vee Y(x_0)$
b) x_0 on mallin ainut laatta
c) x_0 on mallin ainut punainen laatta
d) x_0 on mallin vasemmassa reunassa

14. Tutkitaan mallia, jonka universumi on luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, ja jossa on järjestysrelaatio $<^{\mathbb{N}}$. Osoita, että joukot $\{1\}$ ja $\{2\}$ ovat määriteltäviä.

$*$**15.** Osoita, että verkon niiden pisteiden, joilla on tasan yksi naapuri, muodostama joukko on määriteltävä. Perustele huolellisesti