Logiikka 1, Kevät 2012
Harjoitus 7
Palautuspäivä 16.3.
HY Matematiikan ja tilastotieteen laitos

$*$**1.** Käy antamassa kurssipalautetta osoitteessa `https://elomake.helsinki.fi/lomakkeet/34146/lomake.html`. **Huom! Osoite muuttunut.**

2. Olkoon $\mathcal{M}$ laattamalli (ks. Jouko Väänäsen materiaali Logic One), jossa $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$\begin{aligned} B^{\mathcal{M}} &= \{1, 5, 3\} \\ R^{\mathcal{M}} &= \{6\} \\ Y^{\mathcal{M}} &= \{2, 4\} \\ <^{\mathcal{M}} &= \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,6), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (3,6), (4,2), (4,6), \\ &\quad (5,1), (5,2), (5,4), (5,6)\} \end{aligned}$$

Piirrä laattamalli $\mathcal{M}$. Ole huolellinen, sillä mallia $\mathcal{M}$ käytetään seuraavissa tehtävissä.

3. Olkoon $\mathcal{M}$ kuten tehtävässä 2, ja olkoon $s\colon \{x_0, x_1, \ldots\} \to \mathcal{M}$ tulkintajono, jolla

$$s(x_i) = \begin{cases} 6, & \text{kun } i = 0 \\ 1, & \text{kun } i = 1 \\ 4, & \text{kun } i = 2 \\ 3, & \text{kun } i > 2 \end{cases}$$

Ilmoita pyydetyn tulkintajonon arvot samaan tapaan.

a) $s(1/x_0)$
b) $s(3/x_0)(3/x_1)(3/x_2)$
c) $s(1/x_1)(2/x_2)$
d) $s(3/x_1)(4/x_1)$
e) $s(4/x_2)$
f) $s(6/x_1)(4/x_2)(3/x_1)(5/x_0)$

4. Olkoot $\mathcal{M}$ ja s kuten edellisessä tehtävässä. Selvitä

a) $s(1/x_6)(x_2)$
b) $s(3/x_6)(x_6)$
c) $s(1/x_2)(2/x_2)(x_2)$
d) $s(3/x_1)(1/x_2)(4/x_1)(x_1)$
e) $s(4/x_3)(x_3)$
f) $s(1/x_2)(2/x_1)(3/x_2)(x_1)$

$*$**5.** Olkoot $\mathcal{M}$ ja s kuin edellä. Päteekö väite? Perustele.

a) $\mathcal{M} \models_{s(1/x_2)} <(x_2, x_2)$
b) $\mathcal{M} \models_{s(4/x_0)} R(x_2) \vee \neg R(x_0)$
c) $\mathcal{M} \models_{s(3/x_0)(5/x_1)(6/x_0)} R(x_0) \wedge <(x_1, x_0)$

6. Olkoot $\mathcal{M}$ ja s kuin edellä. Päteekö väite? Perustele.

a) On olemassa laatta $a \in \mathcal{M}$, jolla $\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)} <(x_0, x_1)$.

b) Jokaisella $a \in \mathcal{M}$ pätee $\mathcal{M} \models_{s(a/x_3)} R(x_3) \vee Y(x_3) \vee B(x_3)$.
c) Jokaisella $a \in \mathcal{M}$ pätee $\mathcal{M} \models_{s(a/x_0)(6/x_2)} <(x_0, x_2) \vee x_0 = x_2$.

7. Olkoot $\mathcal{M}$ ja s kuin edellä. Päteekö väite? Perustele.

a) $\mathcal{M} \models_{s(1/x_2)} \exists x_0(<(x_2, x_0) \wedge B(x_0))$.
b) $\mathcal{M} \models_s \forall x_0(R(x_0) \vee \exists x_1(<(x_0, x_1) \wedge R(x_1)))$.
c) $\mathcal{M} \models_s \forall x_0 \forall x_1(\neg x_0 = x_1 \rightarrow \neg(R(x_0) \wedge R(x_1)))$

$*$**8.** Olkoot $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ ja $\mathcal{T}_3$ seuraavat laattamallit.

B	B	Y

$\mathcal{T}_1$

Y	Y	Y	Y

$\mathcal{T}_2$

R	B

$\mathcal{T}_3$

Mitä seuraavat lauseet sanovat suomen kielellä? Missä laattamalleista $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ ja $\mathcal{T}_3$ lause on tosi? Voit sivuuttaa perustelut.

a) $\forall x_1(B(x_1) \vee Y(x_1))$
b) $\exists x_0 \exists x_1(\neg x_0 = x_1 \wedge B(x_0) \wedge B(x_1))$
c) $\exists x_0 \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4(Y(x_0) \wedge Y(x_1) \wedge Y(x_2) \wedge Y(x_3) \wedge Y(x_4))$
d) $\exists x_0 \exists x_1 \exists x_2(\neg x_0 = x_1 \wedge \neg x_0 = x_2 \wedge \neg x_1 = x_2)$
e) $\exists x_0(Y(x_0)) \leftrightarrow \forall x_1(\neg Y(x_1))$

9. Kirjoita laattamallien aakkostossa $\{B, R, Y, <\}$ lause, joka ilmaisee ominaisuuden

a) mallissa on ainakin yksi punainen laatta
b) mallissa ei ole keltaisia laattoja
c) mallin kaikki laatat ovat joko punaisia tai sinisiä
d) mallissa on punainen laatta, jonka vasemmalla puolella on sininen laatta.

10. Piirrä laattamalli, joka toteuttaa annetun lauseen. Pelkkä piirros riittää.

a) $\exists x_0(R(x_0) \wedge \forall x_1(x_1 = x_0 \vee <(x_0, x_1)))$
b) $\forall x_0(R(x_0) \rightarrow \exists x_1(<(x_1, x_0) \wedge B(x_1)))$
c) $\exists x_0 \exists x_1 \exists x_2(Y(x_0) \wedge Y(x_1) \wedge R(x_2) \wedge <(x_0, x_2) \wedge <(x_2, x_1))$
d) $\forall x_0 R(x_0) \wedge \neg \exists x_1 \exists x_2(\neg x_1 = x_2)$

11. Olkoon $\mathcal{G}$ verkko, jossa $\mathcal{G} = \{A, B, C, D, E, F\}$ ja

$$E^{\mathcal{G}} = \{(A, B), (A, C), (B, A), (B, C), (C, A), (C, B), (C, D), (D, C), (D, E), (E, D)\}$$

Piirrä verkko $\mathcal{G}$.

12. Olkoon $\mathcal{G}$ kuten edellisessä tehtävässä, ja olkoon s tulkintajono, jolla

$$s(x_0) = A \qquad s(x_2) = F$$
$$s(x_1) = C \qquad s(x_3) = E$$

ja $s(x_i) = D$, kun $i > 3$. Päteekö $\mathcal{G} \models_s \varphi$, kun

a) $\varphi = E(x_0, x_1)$
b) $\varphi = \exists x_0 \neg E(x_0, x_1)$
c) $\varphi = \exists x_2 (E(x_2, x_3) \wedge \neg E(x_2, x_1))$
d) $\varphi = \forall x_0 \neg E(x_0, x_2)$?

13. Piirrä verkko, joka toteuttaa annetun lauseen, jos sellainen on olemassa. Pelkkä piirros tai toteamus, että tällaista verkkoa ei ole, riittää.

a) $\forall x_0 \exists x_1 E(x_0, x_1)$
b) $\neg \forall x_0 \exists x_1 E(x_0, x_1)$
c) $\forall x_0 \forall x_1 (E(x_0, x_1) \to x_0 = x_1)$
d) $\forall x_0 \forall x_1 E(x_0, x_1)$
e) $\forall x_0 \forall x_1 (\neg E(x_0, x_1) \leftrightarrow \exists x_2 (E(x_0, x_2) \wedge E(x_1, x_2)))$

$*$**14.** Muotoile verkkojen aakkoston $\{E\}$ kielellä lause, joka on totta missä tahansa verkossa jos ja vain jos

a) verkossa ei ole yhtään viivaa
b) verkossa on kaksi alkiota, joiden välillä on viiva
c) jokaisella verkon pisteellä on ainakin yksi naapuri
d) verkossa on ainakin kaksi alkiota, joilla ei ole naapureita