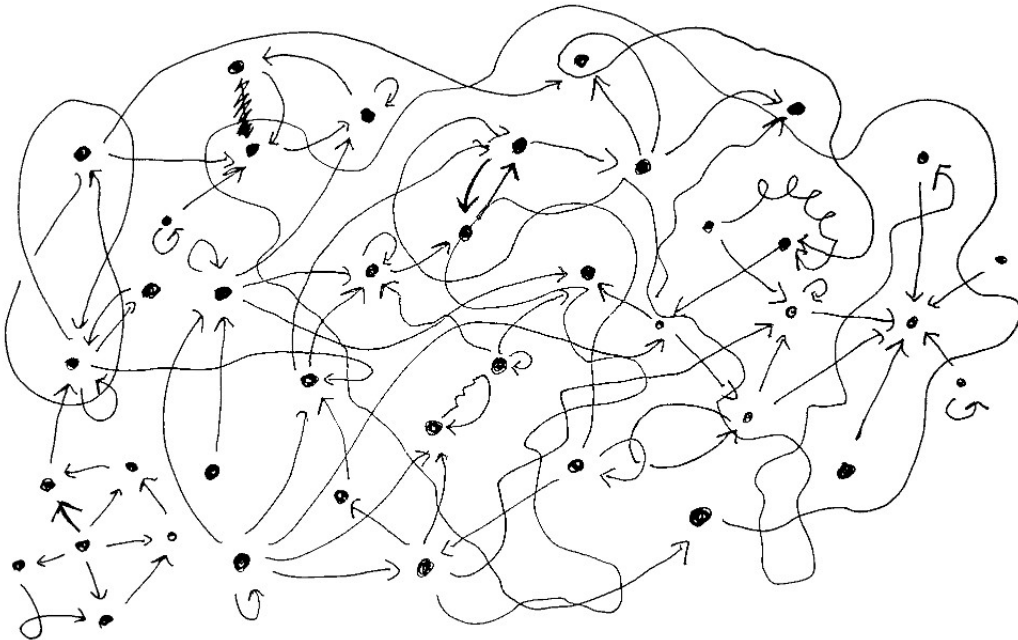


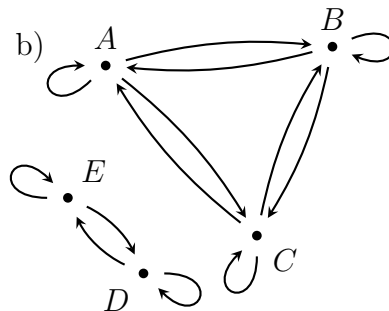
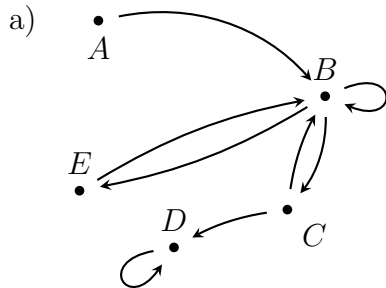
Logiikka 1, Kevät 2012
 Harjoitus 6
 Palautuspäivä 22.2.
 HY Matematiikan ja tilastotieteen laitos

1. Onko kuvan relaatio

- a) refleksiivinen
- b) transitiivinen
- c) antisymmetrinen?



*2. Kirjoita seuraavat joukon $X = \{A, B, C, D, E\}$ kaksipaikkaiset relaatiot joukko-opillisella notaatiolla.



3. Tutki, ovatko edellisen tehtävän relaatiot

- a) refleksiivisiä

- b) irrefleksiivisiä
- c) symmetrisiä
- d) antisymmetrisiä
- e) transitiivisia
- f) vertailullisia.

Pelkkä vastaus riittää.

*4. Piirrä seuraaville joukon $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kaksipaikkaisille relaatioille relaatiokaaviot.

- a) \emptyset
- b) $\{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (5, 4)\}$
- c) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- d) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$

5. Mitkä edellisen tehtävän relaatioista ovat

- a) refleksiivisiä
- b) irrefleksiivisiä
- c) symmetrisiä
- d) antisymmetrisiä
- e) transitiivisia

Pelkkä vastaus riittää.

Tehtävissä 6-8 olkoon $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tehtävänäsi on etsiä jokin joukon X kaksipaikkainen relaatio, ja antaa se sekä formaalilla joukkomerkinällä, että relaatiokaaviona. Pelkkä vastaus ilman perusteluja riittää. Relaation tulee olla

6. refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiivinen.

7. symmetrinen, transitiivinen ja refleksiivinen.

8. symmetrinen, transitiivinen ja irrefleksiivinen.

9. Olkoon $L = \{\leq\}$ ja \mathcal{M} L -malli, jonka perusjoukkona on luonnollisten lukujen joukko \mathbb{N} ja jossa $\leq^{\mathcal{M}}$ on luonnollisten lukujen tavallinen järjestys. Olkoon s tulkintajono, jolla $s(x_0) = 5$, $s(x_1) = 8$ ja $s(x_2) = 8$. Osoita Tarskin totuusmääritelmään vedoten, että

- a) $\mathcal{M} \models_s x_0 \leq x_1$
- b) $\mathcal{M} \models_s x_1 = x_2$
- c) $\mathcal{M} \models_s x_0 \leq x_2 \wedge \neg x_2 \leq x_0$
- d) $\mathcal{M} \models_s \exists x_2 (x_2 \leq x_0)$
- e) $\mathcal{M} \models_s \forall x_0 (x_0 \leq x_0)$

10. Olkoon \mathcal{M} kuten edellisessä tehtävässä. Etsi jokin tulkintajono s , jolla

- a) $\mathcal{M} \models_s x_0 \leq x_2 \wedge (x_2 \leq x_1 \wedge x_1 = x_2)$
- b) $\mathcal{M} \models_s \exists x_1(x_0 \leq x_1)$
- c) $\mathcal{M} \models_s \forall x_2(x_3 \leq x_2)$

11. Olkoon $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y - x > 3 \text{ tai } x = y\}$ reaalitylukujen kaksipaikkainen relaatio. Piirrä relaatiokaaviosta osa, jossa näkyy luvut $\{1, 2, \dots, 8\}$.

12. Onko edellisen tehtävän relaatio P

- a) refleksiivinen
- b) irrefleksiivinen
- c) symmetrinen
- d) antisymmetrinen
- e) transitiivinen
- f) vertailullinen?

Perustele väitteesi.

***13.** Jouko Väänänen monisteessa esitellään *laattamalli (tile model)*. Laattamallit koostuvat kolmesta yksipaikkaisesta predikaatista, sekä lineaarijärjestyksestä. Tutustu laattamalleihin. Olkoon $\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 4\}$ laattamalli, jonka jolle pätee

$$\begin{aligned} B^{\mathcal{T}} &= \{3, 4\} \\ R^{\mathcal{T}} &= \{1\} \\ Y^{\mathcal{T}} &= \{2\} \\ <^{\mathcal{T}} &= \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 3)\}. \end{aligned}$$

Piirrä malli \mathcal{T} .

***14.** Olkoon s jokin edellisen tehtävän laattamallin \mathcal{T} tulkintajono, jolla $s(x_0) = 3$, $s(x_1) = 4$ ja $s(x_2) = 2$. Osoita Tarskin totuusmääritelmän avulla, että

- a) $\mathcal{T} \models_s \neg R(x_0) \wedge \neg Y(x_0)$
- b) $\mathcal{T} \models_s x_2 < x_0 \wedge \neg Y(x_1)$
- c) $\mathcal{T} \models_s (R(x_2) \wedge B(x_0)) \vee Y(x_2)$.

15. Olkoon s ja \mathcal{T} kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että

- a) $\mathcal{T} \models_s \exists x_1(x_1 < x_0)$
- b) $\mathcal{T} \not\models_s \forall x_0 \exists x_1(x_1 < x_0)$.

16. Olkoon $J \subset \{2, 3, 4, 5, \dots\}^2$ luonnollisten lukujen jakorelaatio, eli

$$(n, m) \in J \iff \text{löytyy jokin kokonaisluku } k \in \mathbb{N}, \text{ jolla } m = nk.$$

Todista, että J on osittaisjärjestys. Onko se lineaarijärjestys? Perustele.