

## Logiikka 1, Kevät 2012

### Harjoitus 5

Palautuspäivä 15.2.

#### HY Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Selvitä, mitä eheyslause ja täydellisyyslause sanovat. Seuraavissa tehtävissä saa käyttää eheyslauseita, muttei täydellisyyslauseita. Kun tehtävänannossa on annettu vain väite, tehtävänäsi on todistaa se. Moni tehtävistä nojaa edellisiin tehtäviin.

Vaikka käyttäisit jossakin tehtävässä jonkin edellisen tehtävän päättelyä, kirjoita silti aina kokonaisia todistuksia.

1. Seuraavasta luonnollisesta päättelystä puuttuu päättelysäännöt sekä merkinnät siitä, minkä säännön yhteydessä mikäkin oletus on hylätty. Kirjoita päättely uudestaan ja lisää puuttuvat merkinnät.

$$\frac{[(A \vee B)] \quad \frac{\frac{[A] \quad (A \rightarrow C)}{C} \quad \frac{[B] \quad (B \rightarrow C)}{C}}{C}}{((A \vee B) \rightarrow C)}$$

\*2.  $(A \vee B) \vdash (B \vee A)$

3.  $(A \vee (B \vee C)) \vdash ((A \vee B) \vee C)$

4. Kirjoita päättely uudestaan ja lisää päättelyyn puuttuvat merkinnät.

$$\frac{\frac{\frac{[A] \quad [\neg A]}{(A \wedge \neg A)}}{\neg B}}{(A \rightarrow \neg B) \quad \neg(A \rightarrow \neg B)}}{((A \rightarrow \neg B) \wedge \neg(A \rightarrow \neg B))} \quad \frac{[\neg B]}{(A \rightarrow \neg B) \quad \neg(A \rightarrow \neg B)}}{((A \rightarrow \neg B) \wedge \neg(A \rightarrow \neg B))} \quad \frac{(A \wedge B)}{B} \quad \frac{(A \wedge B)}{A} \quad \frac{[(A \rightarrow \neg B)]}{\neg B}}{\frac{(B \wedge \neg B)}{\neg(A \rightarrow \neg B)}}}{(A \wedge B) \quad \frac{\frac{\frac{\neg \neg A}{A}}{(A \wedge B)}}{\neg(A \rightarrow \neg B)}}{(\neg(A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (A \wedge B))}}$$

5. Oletetaan, että

- Esko ajaa töihin joko autolla tai pyörällä.
- Jos auto on rikki, niin Esko ei aja töihin autolla.

Todista suomenkielisin lausein näistä oletuksista väite ”Jos Esko ei aja töihin pyörällä, niin Eskon auto on ehjä”. Erottele mahdollisimman selkeästi yksittäiset todistusaskelleet.

6. Merkitään propositiosymboleilla seuraavia lauseita:

- $p_0$ : Esko ajaa töihin autolla.
- $p_1$ : Esko ajaa töihin pyörällä.
- $p_2$ : Auto on rikki.

Formalisoi edellisen tehtävän oletukset ja väite propositiolauseina, ja todista luonnollisella päättelyllä oletuksista väite.

\*7.  $\vdash (A \leftrightarrow \neg\neg A)$

8.  $((B \wedge A) \rightarrow (D \wedge C)) \vdash ((A \wedge B) \rightarrow (C \wedge D))$

\*9.  $\vdash ((A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$

10. Osoita eheyslauseen avulla, että luonnollisella päättelyllä ei voida päätellä lausetta  $p_0$  oletuksesta  $(\neg p_0 \rightarrow p_1)$ .

\*11. Osoita eheyslauseen avulla, että luonnollisella päättelyllä ei voida päätellä lausetta  $p_1$  oletuksesta  $(\neg p_0 \rightarrow p_1)$ .

12.  $(A \vee (A \vee A)) \vdash (A \wedge A)$

13. Osoita eheyslauseen avulla, että  $(p_0 \rightarrow p_1) \not\vdash (p_1 \leftrightarrow p_0)$ .

14. Osoita käyttämällä eheyslauseita, että  $\not\vdash \neg(p_0 \rightarrow \neg p_0)$ .

15.  $\{p_1, \neg p_1\} \vdash (p_0 \wedge \neg p_0)$

16. a)  $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$

b)  $\neg(A \vee \neg A) \vdash A$

*Vinkki: Vastaoletus molemmissa kohdissa.*

17.  $\vdash (A \vee \neg A)$

Seuraavat tehtävät ovat lisätehtäviä, näistä ei tule pisteitä, eikä niiden tekemättä jättäminen vähennä pistemäärää.

T. Päättele  $((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$  ilman oletuksia.

T. Päättele  $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \leftrightarrow \neg B))$  ilman oletuksia.

T. Etsi tautologia, jossa esiintyy jokainen konnektiivi vähintään kerran ja päättele se ilman oletuksia.