Logiikka 1, Kevät 2012
Harjoitus 4
Palautuspäivä 8.2.
HY Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tehtävissä, joissa ohjeena on todistaa jotakin sanallisesti, tarkoitetaan tehtävän 11 kaltaista todistusta. Luonnollisten päättelyjen yhteydessä propositiolauseita ei saa lyhentää, esimerkiksi konjunktiota ja disjunktiota ei saa ketjuttaa, ja kaikki sulkeet on merkittävä näkyviin.

1. Etsi semanttisen puun avulla jokin totuusjakauma, jolla lause

a) $\neg((p_0 \to p_1) \leftrightarrow p_1)$
b) $(p_0 \leftrightarrow (\neg p_1 \leftrightarrow p_2))$
c) $\neg((p_0 \to \neg p_1) \vee (\neg p_0 \to p_1))$
d) $(((p_0 \vee \neg p_1) \wedge (p_1 \vee p_2)) \wedge (\neg p_2 \vee p_0))$

toteutuu, mikäli tällainen jakauma ylipäätään on olemassa.

2. Etsi semanttisen puun avulla jokin totuusjakauma, jolla lause

a) $((p_0 \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_0 \to p_1) \to (p_0 \to p_2)))$
b) $((p_4 \wedge p_3) \leftrightarrow (\neg p_4 \vee \neg p_3))$

toteutuu, mikäli tällainen jakauma löytyy.

3. Päättele luonnollisella päättelyllä $(A \wedge B)$ oletuksesta $(B \wedge A)$.

4. Päättele luonnollisella päättelyllä $(p_6 \vee p_7)$ oletuksesta $(p_6 \wedge p_5)$.

5. Päättele luonnollisella päättelyllä $(A \wedge (A \wedge A))$ oletuksesta A.

6. Alla on esitetty eräs luonnollinen päättely. Mitkä ovat sen oletukset ja mikä on johtopäätös? Kirjoita päättely uudestaan sanallisesti.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \qquad (A \to B)}{B}\,{\scriptstyle \to E} \qquad (B \to C)}{C}\,{\scriptstyle \to E}}{(A \to C)}\,{\scriptstyle \to I,1}$$

7. Mitkä seuraavista päättelyistä on tehty luonnollisen päättelyn sääntöjen mukaisesti? Mitkä ovat näiden oletukset ja mikä on johtopäätös?

a) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2 \qquad [\neg A]^1}{(A \wedge \neg A)}\,{\scriptstyle \wedge I}}{\neg\neg A}\,{\scriptstyle \neg I,1}}{(A \leftrightarrow \neg\neg A)}\,{\scriptstyle \leftrightarrow I,2}$$

b) $$\dfrac{\dfrac{((p_0 \wedge p_1) \wedge p_2)}{p_2}\,{\scriptstyle \wedge E} \qquad \dfrac{\dfrac{((p_0 \wedge p_1) \wedge p_2)}{(p_0 \wedge p_1)}\,{\scriptstyle \wedge E}}{p_0}\,{\scriptstyle \wedge E}}{(p_2 \wedge p_0)}\,{\scriptstyle \wedge E}$$

c)
$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg\neg A]^2$}
\RightLabel{$\scriptstyle \neg E$}
\UnaryInfC{A}
\AxiomC{$(A \leftrightarrow B)$}
\RightLabel{$\scriptstyle \leftrightarrow E$}
\BinaryInfC{B}
\AxiomC{$[\neg B]^1$}
\RightLabel{$\scriptstyle \wedge I$}
\BinaryInfC{$(B \wedge \neg B)$}
\RightLabel{$\scriptstyle \neg I,1$}
\UnaryInfC{$\neg\neg B$}
\RightLabel{$\scriptstyle \rightarrow I$}
\UnaryInfC{$(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B)$}
\end{prooftree}
$$

d)
$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[B]^1$}
\RightLabel{$\scriptstyle \vee I$}
\UnaryInfC{$(B \vee \neg B)$}
\AxiomC{$\neg(B \vee \neg B)$}
\RightLabel{$\scriptstyle \wedge I$}
\BinaryInfC{$((B \vee \neg B) \wedge \neg(B \vee \neg B))$}
\RightLabel{$\scriptstyle \neg I,1$}
\UnaryInfC{$\neg B$}
\end{prooftree}
$$

8. Todista sanallisesti, että mikäli väitteet ”Omena ei ole maukas” ja ”Jos omena on punainen, niin se on maukas” pätevät, niin myös väite ”Omena ei ole punainen” pätee. Voit käyttää esimerkiksi vastaoletusta.

∗**9.** Merkitään propositiosymboleilla seuraavia lauseita:

- p_0: Omena on punainen.
- p_1: Omena on maukas.

Formalisoi edellisen tehtävän oletukset ja väite propositiolauseina ja todista väite oletuksista luonnollisella päättelyllä.

10. Päättele luonnollisella päättelyllä $((A \wedge B) \wedge C)$ oletuksesta $(A \wedge (B \wedge C))$.

∗**11.** Ohessa on esitetty sanallinen todistus lauseelle $(\neg B \rightarrow \neg A)$ oletuksella $(A \rightarrow B)$. Esitä todistus luonnollisena päättelynä.

> Oletetaan, että $\neg B$ pätee. Jos lisäksi A pätisi, niin tästä oletuksen $(A \rightarrow B)$ nojalla saisimme, että B pätee, ja täten saisimme $(B \wedge \neg B)$, mikä olisi ristiriita. Siis A ei voi päteä, vaan $\neg A$ pätee. Koska todistimme lauseen $\neg A$ oletuksella $\neg B$, niin $(\neg B \rightarrow \neg A)$ pätee.

12. Mitkä ovat seuraavan päättelyn oletukset ja mitä siinä todistetaan? Kirjoita päättely sanallisesti.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[B]^2$}
\AxiomC{$[\neg A]^1$}
\AxiomC{$(\neg A \rightarrow \neg B)$}
\RightLabel{$\scriptstyle \rightarrow E$}
\BinaryInfC{$\neg B$}
\RightLabel{$\scriptstyle \wedge I$}
\BinaryInfC{$(B \wedge \neg B)$}
\RightLabel{$\scriptstyle \neg I,1$}
\UnaryInfC{$\neg\neg A$}
\RightLabel{$\scriptstyle \neg E$}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{$\scriptstyle \rightarrow I,2$}
\UnaryInfC{$(B \rightarrow A)$}
\end{prooftree}
$$

13. Todista sanallisesti, että mikäli lauseet $(A \rightarrow B)$ sekä $(A \rightarrow C)$ pätevät, niin lause $(A \rightarrow (B \wedge C))$ pätee.

∗**14.** Päättele luonnollisella päättelyllä $(A \rightarrow (B \wedge C))$ oletuksista $(A \rightarrow B)$ ja $(A \rightarrow C)$.

15. Päättele luonnollisella päättelyllä $\neg A$ oletuksesta $(A \rightarrow (B \wedge \neg B))$.

16. Muotoile seuraava sanallinen todistus luonnolliseksi päättelyksi. Oletuksista $(A \to C)$, $(B \to C)$ ja $(A \vee B)$ todistetaan C.

> Mikäli lause A pätee, koska $(A \to C)$, niin myös lause C pätee. Mikäli lause B pätee, ja $(B \to C)$, niin myös lause C pätee. Koska $(A \vee B)$, niin jompikumpi lauseista A ja B pätee, ja kummassakin tapauksessa lause C päti, joten C pätee.

17. Päättele luonnollisella päättelyllä $(A \to C)$ oletuksista B ja $(A \to (B \to C))$.

18. Päättele luonnollisella päättelyllä $(B \to (A \to C))$ oletuksesta $(A \to (B \to C))$.

19. Mitkä ovat seuraavan päättelyn oletukset ja mikä on johtopäätös? Muuta päättely sanalliseksi todistukseksi.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \qquad (A \to B)}{B}\,{\scriptstyle \to E}}{(B \vee C)}\,{\scriptstyle \vee I}}{(A \to (B \vee C))}\,{\scriptstyle \to I,1}$$