Logiikka 1, Kevät 2012
Harjoitus 3
Palautuspäivä 1.2.
HY Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Käy läpi monisteen kappale "Totuusfunktio". Tästä lähtien saat käyttää konjunktioiden ja disjunktioiden tapauksessa kappaleessa mainittua lyhennysmerkintää propositiolauseita kirjoittaessasi. Saat myös jättää uloimmat sulut pois, kunhan muistat, että tämä on vain lyhennysmerkintä, ja että oikeasti propositiolauseet ovat propositiolauseita.

1. Keksi propositiologiikan lause A, jossa esiintyy vain propositiosymbolit p_0 ja p_1, jonka totuustaulu on

a)

p_0	p_1	A
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

b)

p_0	p_1	A
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

$*$**2.** Keksi propositiologiikan lause A, jossa esiintyy vain propositiosymbolit p_0, p_1 ja p_2, jonka totuustaulu on

a)

p_0	p_1	p_2	A
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

b)

p_0	p_1	p_2	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

3. Keksi propositiologiikan lause A, jossa esiintyy vain propositiosymbolit p_0, p_1 ja p_2, jonka totuustaulu on

a)

p_0	p_1	p_2	A
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

b)

p_0	p_1	p_2	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

4. Anna seuraavien lauseiden totuusfunktiot luettelemalla funktion arvot (järkevässä, eli monisteen totuustauluissa käytetyssä tai päinvastaisessa, järjestyksessä). Kohta a) on tehty puolestasi.

a) $(p_0 \to (p_1 \wedge p_0))$
Ratkaisu. Merkitään tehtävän lausetta A. Tällöin

$$\begin{aligned} T_A(0,0) &= 1 \\ T_A(0,1) &= 1 \\ T_A(1,0) &= 0 \\ T_A(1,1) &= 1 \end{aligned}$$

b) $((p_0 \leftrightarrow \neg\neg p_1) \to p_1)$
c) $(\neg p_2 \to (p_1 \vee p_0))$
d) $\neg(p_2 \to ((p_1 \leftrightarrow p_2) \vee p_0))$

5. Anna seuraavien lauseiden totuusfunktiot kuten edellisessä tehtävässä.

a) $(p_0 \to (p_1 \vee \neg p_1))$
b) $(p_0 \to (p_1 \vee \neg p_2))$
c) $(((p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow \neg(p_1 \leftrightarrow p_2)) \wedge (p_1 \vee p_2))$

6. Etsi propositiolause, jossa ei esiinny muita konnektiiveja kuin $\neg$ ja $\to$, ja joka on ekvivalentti lauseen

a) $(p_0 \vee p_1)$
b) $(p_0 \leftrightarrow p_1)$
c) $(p_0 \wedge (p_1 \leftrightarrow \neg p_2))$
d) $\neg(p_0 \to (p_0 \leftrightarrow (p_1 \vee p_0)))$

kanssa.

$*$**7.** Osoita, että jokaista propositiolausetta A kohti löytyy ekvivalentti propositiolause A', jossa ei esiinny muita konnektiiveja kuin $\neg$ ja $\to$.

Vinkki: Induktio lauseen A rakenteen suhteen. Monisteessa on eräs lause, jonka todistus on hyvin samankaltainen.

8. Osoita, että konnektiivijoukko $\{\neg, \to\}$ on täydellinen.

9. Olkoon $v(n) = 1$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että jos A on propositiologiikan lause, jossa ei esiinny muita konnektiiveja kuin $\to$, niin $v[A] = 1$. Käytä induktiota lauseen A suhteen.

10. Osoita, että joukko $\{\to\}$ ei ole täydellinen konnektiivijoukko.

Vinkki: Valitse täydellisen konnektiivijoukon määritelmän funktioksi f esimerkiksi funktio $f\colon \{0,1\} \to \{0,1\}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.

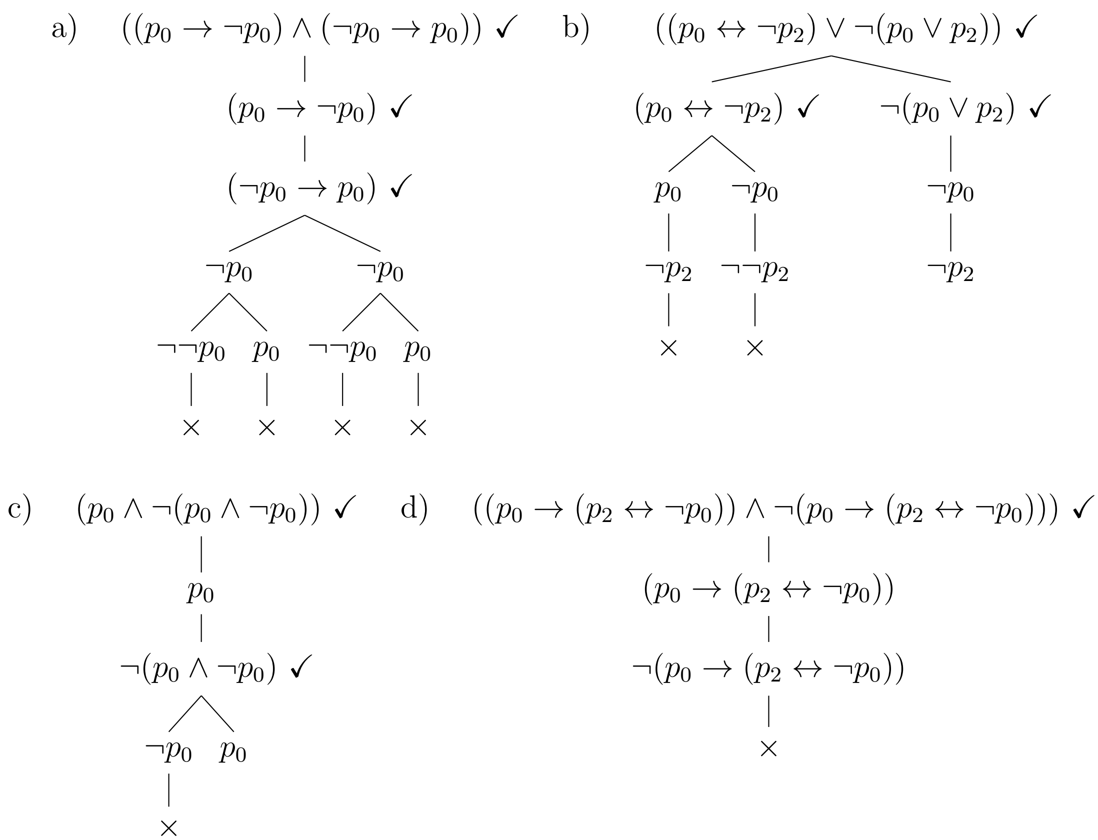
11. Piirrä semanttiset puut seuraaville lauseille.

a) $((p_0 \wedge p_1) \wedge p_2)$
b) $((p_0 \vee p_1) \wedge p_2)$
c) $\neg(p_2 \rightarrow (p_4 \rightarrow p_2))$
d) $((p_0 \rightarrow p_1) \wedge \neg(\neg p_1 \rightarrow \neg p_0))$

$*$**12.** Piirrä semanttiset puut seuraaville lauseille.

a) $(p_0 \leftrightarrow \neg p_1)$
b) $((p_0 \wedge \neg p_1) \vee (p_1 \wedge \neg\neg p_2))$
c) $(p_0 \leftrightarrow (p_0 \leftrightarrow p_0))$
d) $\neg(p_8 \rightarrow ((\neg p_1 \vee p_3) \wedge p_2))$

13. Mitkä seuraavista semanttisista puista on piirretty oikein ja loppuun asti?



$*$**14.** Käyttäen apuna semanttista puuta, etsi jokin totuusjakauma, joka toteuttaa lauseen

a) $(((p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow p_2) \rightarrow p_3)$
b) $\neg((p_8 \rightarrow p_5) \leftrightarrow (p_8 \wedge p_5))$
c) $\neg(p_1 \rightarrow (p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \neg p_2)))$

15. Ota selvää, mikä on *disjunktiivinen normaalimuoto* (disjunctive normal form, DNF). Mitkä seuraavista lauseista ovat disjunktiivisessa normaalimuodossa?

a) $(p_9 \wedge \neg p_8) \vee (p_7 \wedge \neg p_6) \vee (p_5 \wedge p_4)$
b) $(p_0 \wedge p_4) \vee \neg p_7$
c) $\neg p_8 \vee (p_0 \wedge p_4) \vee (\neg p_7 \wedge \neg\neg p_1)$
d) $(p_0 \wedge p_6 \wedge \neg p_6)$
e) $\neg((p_0 \wedge p_4) \vee (p_1 \wedge p_4) \vee (p_8 \wedge \neg p_8))$

16. Etsi disjunktiivisessa normaalimuodossa oleva lause, joka on ekvivalentti lauseen

a) $\neg((p_0 \vee \neg p_1) \wedge p_2)$
b) $(p_0 \leftrightarrow (p_1 \vee p_2))$
c) $(p_1 \wedge p_2 \wedge \neg(p_4 \vee p_2))$

kanssa. Lauseen, jossa todistetaan, että jokainen totuusfunktio on jonkin propositiolauseen totuusfunktio, todistuksesta saattaa olla apua.