Logiikka 1, Kevät 2012
Harjoitus 2
Palautuspäivä 25.1.
HY Matematiikan ja tilastotieteen laitos

1. Anna esimerkki totuusjakaumasta, jolla lause

a) $(p_0 \wedge (\neg p_1 \wedge (\neg p_2 \wedge (p_3 \wedge \neg p_4))))$
b) $\neg((p_0 \wedge p_1) \to (\neg p_0 \wedge \neg p_1))$
c) $(\neg p_0 \wedge ((p_1 \to p_2) \vee (p_3 \leftrightarrow \neg p_4)))$

on tosi.

2. Olkoon v jokin totuusjakauma. Määritellään uusi totuusjakauma v' niin, että

$$v'(n) = \begin{cases} 0, & \text{kun } v(n) = 1 \\ 1, & \text{kun } v(n) = 0 \end{cases}$$

Lyhyemmin siis: $v'(n) = 1 - v(n)$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

a) $v'[A] = v[A]$ jokaisella propositiolauseella A.
b) $v'[A] = 1 - v[A]$ jokaisella propositiolauseella A.
c) $v'[A] = v[A]$ jollakin propositiolauseella A.
d) $v'[A] = 1 - v[A]$ jollakin propositiolauseella A.

3. Osoita seuraavat lauseet tautologioiksi käyttämättä totuustaulua. Aloita siis näin: *"Olkoon v mielivaltainen totuusjakauma."* Osoita sitten, että lauseen totuusarvo jakaumalla v on 1.

a) $(p_0 \to (p_1 \to p_0))$
b) $((p_0 \wedge \neg p_0) \to A)$, missä A on mielivaltainen propositiolause
c) $((p_0 \wedge (p_0 \to p_1)) \to p_1)$
d) $((A \to (\neg p_0 \wedge p_0)) \to \neg A)$, missä A on mielivaltainen propositiolause

4. Pohdi luonnollisten lukujen induktiota. Hallitse se ja kirjoita lyhyt ja ytimekäs essee.

5.

a) Olkoon $a \neq 0$ reaaliluku. Osoita, että jos $\frac{1+a}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, niin $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
b) Määritellään lukujono (a_n) rekursiivisesti: $a_0 = 1$ ja $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{a_n}$. Osoita luonnollisten lukujen induktiolla, että lukujono ei koskaan saa arvoa $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Vinkki: Käytä induktioaskeleessa vastaoletusta.

6. Todista induktiolla luvun n suhteen, että

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Vinkki: Induktioaskeleessa hajoita summa kahteen osaan:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{2^i} = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \right) + \frac{1}{2^{n+1}}$$

7. Luentomateriaalissa propositiolauseiden induktioperiaatteen todistuksen yhteydessä konstruoidaan joukoista $P_0 \subset P_1 \subset \ldots$ koostuva tasohierarkia. Millä tasolla seuraavat lauseet tulevat vastaan tässä hierarkiassa? Siis mikä on ensimmäinen luku n, jolla seuraavat lauseet kuuluvat joukkoon P_n?

a) p_7
b) p_{99999}
c) $(p_9 \to p_4)$
d) $(\neg\neg p_1 \leftrightarrow p_1)$
e) $\neg((p_8 \to p_9) \vee (p_1 \wedge \neg p_1))$

8. Määritellään *kivojen maiden joukko* seuraavasti:

- Suomi on kiva maa.
- Jos M on kiva maa ja N on maan M rajanaapuri, niin myös N on kiva maa.

Osoita, että Italia on kiva maa.

$*$**9.** Olkoon v totuusjakauma ja $X = \{A\colon A \text{ on propositiolause}, v[A] = 1\}$. Osoita, että

a) jos $A \in X$ ja $B \in X$, niin $(A \vee B) \in X$
b) jos $A \in X$ ja $B \in X$, niin $(A \wedge B) \in X$

Anna esimerkki totuusjakaumasta v ja lauseesta A, jolla $A \in X$, mutta $\neg A \notin X$.

10. Olkoon v totuusjakauma, jolla $v(0) = v(1) = v(2) = v(3) = 1$. Kerro miten edellisen tehtävän tuloksista seuraa

a) $v[(p_0 \wedge (p_1 \wedge p_3))] = 1$
b) $v[((p_0 \wedge p_2) \wedge (p_1 \wedge p_3))] = 1$
c) $v[((p_0 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3))] = 1$
d) $v[(p_0 \wedge ((p_1 \vee p_2) \vee (p_3 \wedge p_3)))] = 1$

Miksei kuitenkaan päde $v[((p_0 \wedge p_3) \wedge \neg(p_3 \vee p_0))] = 1$?

$*$**11.** Olkoon v totuusjakauma, jolla $v(n) = 1$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, ja A propositiolause, jossa ei ole muita konnektiivejä kuin $\wedge$ ja $\vee$. Osoita, että $v[A] = 1$. Käytä induktiota lauseen A rakenteen suhteen.

Vinkki: Koska lause A on muodostettu pelkästään konnektiiveilla $\wedge$ ja $\vee$, induktiossa tarvitsee käydä alkuaskeleen lisäksi vain näitä konnektiiveja vastaavat induktioaskeleet.

12. Määritellään *sanojen* joukko seuraavasti:

- `10` on sana.
- jos A on sana, niin `1`A`0` on sana.
- jos A ja B ovat sanoja, niin `0`A`1`B on sana.

Mitkä seuraavista merkkijonoista ovat sanoja? Piirrä niiden, jotka ovat sanoja, jäsennyspuu.

a) `1100`
b) `01011100`
c) `1010`
d) `11100010`
e) `01100110`

13. Osoita induktiolla sanojen määritelmän suhteen (katso edellinen tehtävä), että jokainen sana loppuu merkkiin `0`.

$*$**14.** Osoita induktiolla sanojen määritelmän suhteen (katso edellinen tehtävä), että jokaisessa sanassa on yhtä monta `0`-merkkiä ja `1`-merkkiä.

15. Olkoot A ja B mielivaltaisia propositiologiikan lauseita. Osoita, että lauseet $\neg(A \leftrightarrow B)$, $(\neg A \leftrightarrow B)$ ja $(A \leftrightarrow \neg B)$ ovat keskenään ekvivalentteja, negaatio voidaan siis tuoda ulos ekvivalensseilla muodostetuista lauseista.

16. Osoita käyttäen edellisen tehtävän tulosta, että lauseet ovat ekvivalentteja.

a) $(\neg p_1 \leftrightarrow p_2)$ ja $\neg(p_1 \leftrightarrow p_2)$
b) $(p_5 \leftrightarrow (\neg p_7 \leftrightarrow p_6))$ ja $\neg(p_5 \leftrightarrow (p_7 \leftrightarrow p_6))$
c) $(\neg(p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow (\neg p_0 \leftrightarrow p_3))$ ja $\neg\neg((p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow (p_0 \leftrightarrow p_3))$
d) $\neg(\neg p_0 \leftrightarrow (\neg p_2 \leftrightarrow (p_2 \leftrightarrow \neg p_0)))$ ja $\neg\neg\neg\neg(p_0 \leftrightarrow (p_2 \leftrightarrow (p_2 \leftrightarrow p_0)))$

17. Olkoon A lause, jossa ei ole muita konnektiiveja kuin $\leftrightarrow$ ja $\neg$ (näitä voi toki olla useita). Osoita induktiolla lauseen A rakenteen suhteen, että A on ekvivalentti sellaisen lauseen kanssa, joka alkaa jollakin määrällä negaatiosymboleja, joiden jälkeen on vain konnektiivilla $\leftrightarrow$ muodostettu lause. Osoita siis, että löytyy lause B, niin että $A \Leftrightarrow \neg\neg\ldots\neg B$ ja lauseessa B ei ole muita konnektiiveja kuin $\leftrightarrow$.

$*$**18.** Kuvitellaan, että propositiolauseidemme määritelmässä kohta *”Mikäli A ja B ovat propositiolauseita, niin $(A \wedge B)$ on propositiolause”* olisi korvattu seuraavalla: *”Mikäli A ja B ovat propositiolauseita, niin $A \wedge B$ on propositiolause”*, ja lauseen $A \wedge B$ totuusarvo jakaumalla v olisi määritelty siten, että $v[A \wedge B] = 1$ jos ja vain jos $v[A] = v[B] = 1$. Tällöin esimerkiksi $(p_1 \to p_1) \wedge (p_2 \to p_2)$, $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$ ja $\neg p_0 \wedge p_1$ olisivat propositiolauseita. Mitä ongelmia tästä seuraisi? Kirjoita lyhyt ja ytimekäs essee. Pohdi esimerkiksi lauseen $\neg p_0 \wedge p_1$ jäsennyspuita ja totuusarvoa sopivalla jakaumalla.