Logiikka 1, Kevät 2012
Harjoitus 12
Palautuspäivä 27.4.
HY Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Näiden tehtävien joukossa ei enää ole tähtitehtäviä, ja ”tähtitehtäväkerroin” on automaattisesti 1. Tehtävät käsittelevät luonnollista päättelyä ja predikaattilogiikan eheyslausetta.

Tehdessäsi luonnollisia päättelyitä perustele ne askeleet, joissa kaavoista tarvitsee olettaa jotain (esimerkiksi että muuttuja on vapaa toiselle tai että jokin muuttuja ei esiinny vapaana joissakin oletuksissa). Kerro myös, mitkä ovat säännön sovelluksessa mahdollisesti mainitut t, x_i, φ ja ψ.

1. Päättelyaskel

$$\frac{\forall x_0(\exists x_4 P(x_4) \wedge R(x_1, x_3) \wedge R(x_0, x_1))}{\exists x_2 \forall x_0(\exists x_4 P(x_4) \wedge R(x_1, x_3) \wedge R(x_0, x_2))}\ \exists I$$

on eräs tapaus eksistenssikvanttorin tuontisäännöstä. Mitkä ovat tässä tilanteessa tuontisäännössä mainitut t, x_i ja φ?

2. Osoita, että $\exists x_0(P(x_0) \to R(x_0)) \vdash \exists x_1(P(x_1) \to R(x_1))$.

3. Päättelyaskel

$$\frac{x_0 = x_1 \qquad \exists x_0 P(x_0) \leftrightarrow \forall x_2(P(x_2) \vee R(x_0, x_1))}{\exists x_0 P(x_0) \leftrightarrow \forall x_2(P(x_2) \vee R(x_1, x_1))}\ {=}4$$

on eräs tapaus säännöstä $= 4$. Mitkä ovat säännössä mainitut t, u, x_i ja φ?

4. Osoita, että $\exists x_0 \neg P(x_0) \vdash \neg \forall x_0 P(x_0)$.

5. Osoita, että $\exists x_0 P(x_0) \to \forall x_0 P(x_0) \vdash \exists x_0 \neg P(x_0) \to \forall x_0 \neg P(x_0)$.
Vinkki: Edellinen tehtävä auttaa.

6. Selitä omin sanoin, mitä merkintä

a) $\Sigma \vdash \varphi$
b) $\Sigma \Rightarrow \varphi$

tarkoittaa. Älä käytä muita matemaattisia symboleja kuin Σ ja φ. Muotoile lisäksi predikaattilogiikan eheyslause omin sanoinesi käyttämättä symbolia $\vdash$ tai symbolia $\Rightarrow$.

7. Etsi semanttisen puun avulla malli lauseelle $\neg \forall x_0 \exists x_1 \neg x_0 = x_1$.

8. Osoita, että luonnollisella päättelyllä ei voida päätellä kaavaa $\forall x_0 \exists x_1 \neg x_0 = x_1$ ilman oletuksia. Käytä sopivassa kohtaa Tarskin totuusmääritelmää.

9. Voidaanko luonnollisella päättelyllä päätellä $\forall x_0 \varphi$ kaavasta φ millä tahansa kaavalla φ? Perustele väitteesi.

10. Voidaanko luonnollisella päättelyllä päätellä $\exists x_0 \varphi$ kaavasta φ millä tahansa kaavalla φ? Perustele väitteesi.

11. Voidaanko verkkojen teoriasta päätellä

a) $\neg \forall x_0 E(x_0, x_0)$
b) $\neg \forall x_0 \neg E(x_0, x_0)$?

Perustele väitteesi.

12. Etsi semanttisen puun avulla malli lauseille $\exists x_0 P(x_0)$ ja $\neg \forall x_0 P(x_0)$.

13. Osoita, että luonnollisella päättelyllä ei voida päätellä kaavaa $\forall x_0 P(x_0)$ kaavasta $\exists x_0 P(x_0)$. Käytä sopivassa kohtaa Tarskin totuusmääritelmää.

14. Keksi mielestäsi erinomainen tehtävä kurssin toisen välikokeen aiheista ja ratkaise se.