Logiikka 1, Kevät 2012
Harjoitus 11
Palautuspäivä 20.4.
HY Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Seuraavat tehtävät liittyvät predikaattilogiikan luonnolliseen päättelyyn. Luonnollinen päättely löytyy monisteen kappaleesta 3.8.

1. Täydennä seuraaviin luonnollisiin päättelyihin sovelletut säännöt.

a) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x_0\forall x_1(x_1=x_1)}{\forall x_1(x_1=x_1)}}{x_1=x_1}}{\forall x_1(x_1=x_1)}}{\forall x_0\forall x_1(x_1=x_1)}$$

b) $$\dfrac{\dfrac{\exists x_1(x_1=x_1) \quad \dfrac{[x_1=x_1]}{\exists x_0(x_0=x_0)}}{\exists x_0(x_0=x_0)} \quad \dfrac{[x_0=x_0]}{\exists x_1(x_1=x_1)}}{\exists x_1(x_1=x_1)}$$

c) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x_2)\leftrightarrow\forall x_1P(x_1) \quad \dfrac{\dfrac{[\forall x_1 P(x_1)]}{P(x_1)}}{\forall x_1P(x_1)}}{P(x_2)}}{\exists x_1P(x_1)}}{\forall x_1P(x_1)\to\exists x_1P(x_1)}$$

d) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x_1R(x_1,x_2)}{R(x_2,x_2)}}{\exists x_0R(x_0,x_0)} \quad \dfrac{\dfrac{[R(x_0,x_0)]}{\exists x_2R(x_2,x_0)}}{\exists x_1\exists x_2R(x_2,x_1)}}{\exists x_1\exists x_2R(x_2,x_1)}$$

2. Seuraavista päättelyistä jokaisessa on kaksi virheellistä askelta. Etsi ne ja selvitä, miksi ne ovat virheellisiä.

a)
$$\dfrac{\dfrac{\exists x_1R(x_0,x_1)}{\forall x_0\exists x_1R(x_0,x_1)}{\scriptstyle\forall I} \quad x_0=x_1}{\forall x_0\exists x_1R(x_0,x_0)}{\scriptstyle =4}$$

b)
$$\dfrac{\dfrac{\exists x_0P(x_0) \quad \dfrac{[P(x_0)]^1 \quad \neg P(x_0)}{P(x_0)\land\neg P(x_0)}{\scriptstyle\land I}}{P(x_0)\land\neg P(x_0)}{\scriptstyle \exists E,1}}{\neg\neg P(x_0)}{\scriptstyle\land E}$$

c)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x_0\exists x_1R(x_0,x_1)}{\exists x_1R(x_1,x_1)}{\scriptstyle\forall E} \quad \dfrac{[R(x_1,x_1)]^1}{\exists x_0R(x_0,x_0)}{\scriptstyle\exists I}}{\exists x_0R(x_0,x_0)}{\scriptstyle\exists E,1}}{R(x_0,x_0)}{\scriptstyle\exists E}$$

3. Päättele luonnollisella päättelyllä $\forall x_0\forall x_1E(x_0,x_1)$ oletuksesta $\forall x_2\forall x_3E(x_2,x_3)$.

4. Päättele luonnollisella päättelyllä $\forall x_0 \forall x_1 E(x_0, x_1)$ oletuksesta $\forall x_0 \forall x_1 E(x_1, x_0)$.
Vinkki: Päättelyä ei voi tehdä neljällä askeleella, toisin kuin tehtävässä 3.

$*$**5.** Päättele luonnollisella päättelyllä verkkojen teoriasta kaava $E(x_3, x_3) \to \neg x_3 = x_3$.

6. Osoita, että $\forall x_0 A(x_0) \wedge \forall x_1 B(x_1) \vdash \forall x_0(A(x_0) \wedge B(x_0))$.

7. Osoita, että $\exists x_0(A(x_0) \wedge B(x_0)) \vdash \exists x_0 A(x_0) \wedge \exists x_1 B(x_1)$.

$*$**8.** Päättele luonnollisella päättelyllä oletuksista $\forall x_0 P(x_0)$ ja $\forall x_0(P(x_0) \to R(x_0))$ johtopäätös $\forall x_0 R(x_0)$.

$*$**9.** Päättele ilman oletuksia

a) $\exists x_0(x_0 = x_0)$
b) $\neg \exists x_0(\neg x_0 = x_0)$.

10. Osoita, että $\neg \exists x_0 P(x_0) \vdash \forall x_0 \neg P(x_0)$.
Vinkki: Oleta aluksi $P(x_0)$.

11. Päättele luonnollisella päättelyllä $\exists x_0 R(x_0)$ oletuksista $\exists x_1 P(x_1)$ ja $\forall x_3(P(x_3) \to R(x_3))$.

12. Päättele oletuksesta $\forall x_0 \forall x_1(x_0 = x_1)$ johtopäätös $\exists x_0 P(x_0) \to \forall x_0 P(x_0)$.

13. Osoita, että $\vdash \forall x_0 \exists x_1(x_0 = x_1)$.