Lineaariset mallit, kl 2012, Harjoitus 6, viikko 18

1. Jatkoa HT:lle 4.3 ja 5.1. Johda F-testi hypoteesille $H : \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$. (*Vihje*: Käytä F-testisuureen jälkimmäistä residuaalineliösummiin perustuvaa esitystä (ks. monisteen s. 19).

2. Tarkastellaan monisteen jakson 3.2 alun tilannetta (s. 19), jossa malliyhtälö on $Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i$, $i = 1, ..., n$, ja testattava hypoteesi $H : \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$. Osoita ensin, että SSE $= \left(1 - R^2\right) \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$, jossa R^2 on selitysaste ja SSE on residuaalineliösumma (ks. s. 10), ja tämän perusteelle edelleen, että F-testisuure edellä mainitulle hypoteesille voidaan kirjoittaa

$$F = \frac{(n-p)\, R^2}{(p-1)\left(1 - R^2\right)}.$$

3. Jatkoa HT:lle 4.4 ja 5.2. Oletetaan, että hypoteesi $\mu_1 = \mu_2$ on tullut hylätyksi. Muodosta $100(1-\alpha)\%$:n luottamusväli erotukselle $\mu_1 - \mu_2$.

4. Jatkoa HT:lle 4.3 ja 6.1. (i) Muodosta $100(1-\alpha)\%$:n luottamusväli parametrivektorin $\boldsymbol{\beta}_1$ lineaarikombinaatiolle $\mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_1$ ($\mathbf{a} = [a_1 \ \cdots \ a_p]' \neq 0$). (ii) Tee sama olettaen, että $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$.

5. Oletetaan, että tavanomaisessa lineaarisessa mallissa $\mathbf{Y} \sim \mathsf{N}\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right)$ ($\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$, $\sigma^2 > \mathbf{0}$, $\mathsf{r}(\mathbf{X}) = p$) selittäjät ovat ortogonaalisia eli $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ on diagonaalimatriisi. Johda parametrin β_j PNS-estimaatti, t-testisuure hypoteesille $H : \beta_j = 0$ ja $100(1-\alpha)\%$:n luottamusväli parametrille β_j ($= \boldsymbol{\beta}$:n j. komponentti). Miten nämä muuttuvat, jos mallista poistetaan joku selittäjistä x_k ($k \neq j$)?