

Lineaariset mallit, kl 2012, Harjoitus 5, viikko 17

1. Jatkoa HT:lle 4.3. Estimoi parametri $\beta = [\beta_1' \ \beta_2']'$ ehdolla $\beta_1 = \beta_2$. Mikä on β :n rajoitetun estimaattorin jakauma? (*Vihje:* Rajoitetulle PNS-estimoinnille monisteessa s. 16-17 esitetty jälkimmäinen tapa.)

2. Jatkoa HT:lle 4.4. Johda F -testi nollahypoteesille $\mu_1 = \mu_2$ ja osoita, että yhtäpitävä testi voidaan perustaa t_{n-2} -jakaumaa noudattavaan t -testisuureeseen ($n = n_1 + n_2$). (*Vihje:* Mallin matriisiesitys (ks. monisteen s. 5), F -testisuureen yleinen lauseke (ks. monisteen s. 18) ja monisteen s. 20 esitetty t -testisuureen johto. Huomaa myös painovirheet monisteen s. 20. Rivillä 7 alhaalta pitää olla $|t(\mathbf{y})|$ eikä $t(\mathbf{y})$ molempien epäyhtälömerkkien oikealla puolella ja kaksi riviä ylempänä pitää olla S eikä s .)

3. Tarkastellaan yhden selittäjän lineaarista regressiomallia $Y_1, \dots, Y_n \parallel$, $Y_i \sim N(\beta_1 + \beta_2 x_i, \sigma^2)$. Johda F -testi nollahypoteesille $\beta_2 = 0$ ja osoita, että testisuure voidaan lausua (tavanomaisin merkinnöin) muodossa

$$F = \frac{\hat{\beta}_2^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{S^2}.$$

(*Vihje:* Mallin matriisiesitys ja F -testisuureen yleinen lauseke (ks. monisteen s. 18). Testisuureen haetun lausekkeen johtamisessa tarvitsset myös 2×2 matriisin käänteismatriisin laskukaavaa.)

4. Jatkoa edelliselle ja HT:lle 2.3. (i) Osoita, että edellisen tehtävän mallissa

$$\text{SSE} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - \hat{\beta}_2^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (1 - r_{xy}^2) (n - 1) s_y^2,$$

jossa r_{xy} on havainnoista (y_i, x_i) , $i = 1, \dots, n$, laskettu korrelaatiokerroin (ks. monisteen alaviite s. 11), $s_y^2 = (n - 1)^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ ja residuaalineliosumma SSE on kuten monisteen s. 10. (ii) Osoita tämän avulla, että edellisen tehtävän F -testi on yhtäpitävä seuraavan t -testin kanssa

$$\sqrt{n - 2} r_{xy} / \sqrt{1 - r_{xy}^2} \stackrel{H}{\sim} t_{n-2}.$$

Minkä hypoteesin testiksi tämä voidaan myös tulkita? (*Vihje:* Monisteen s. 10 oleva yhtälö $\text{SST} = \text{SSR} + \text{SSE}$, jossa SSR:ää voidaan muokata HT:n 2.3 tuloksen avulla. Muista myös, että nyt $S^2 = \text{SSE} / (n - 2)$).