

Lineaariset mallit, kl 2012, Harjoitus 4, viikko 16

1. Tarkastellaan lineaarista mallia $\mathbf{Y} \sim \mathbf{N}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ ($\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$, $\sigma^2 > 0$, $r(\mathbf{X}) = p$). Osoita, että parametrivektorin $[\boldsymbol{\beta}' \ \sigma^2]'$ Fisherin informaatiomatriisi

$$\mathbf{i}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = E \begin{bmatrix} -\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{Y}) / \partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}' & -\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{Y}) / \partial \boldsymbol{\beta} \partial \sigma^2 \\ -\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{Y}) / \partial \sigma^2 \partial \boldsymbol{\beta}' & -\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{Y}) / \partial \sigma^2 \partial \sigma^2 \end{bmatrix}$$

on

$$\mathbf{i}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = \begin{bmatrix} \sigma^{-2} \mathbf{X}' \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & n/2\sigma^4 \end{bmatrix}.$$

(Vihje: Kannattaa ehkä laskea ensin $\partial l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{y}) / \partial \boldsymbol{\beta}$ kuten $\partial S(\boldsymbol{\beta}) / \partial \boldsymbol{\beta}$ monisteen s. 7 ja sen jälkeen $\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{y}) / \partial \boldsymbol{\beta} \partial \sigma^2$ ja edelleen vastaavan satunnaisvektorin odotusarvo. $\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{y}) / \partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'$ saadaan lasketuksi kuten $\partial^2 S(\boldsymbol{\beta}) / \partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'$ (ks. monisteen s. 8) ja $\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{y}) / \partial \sigma^2 \partial \sigma^2$ vaatii pelkästään derivointia reaalisen muuttujan σ^2 suhteen. Huomaa myös symmetrisyys.)

2. Olkoon oikea (täysiasteinen) malli $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1 \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2 \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}$ ($\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$, $\boldsymbol{\beta}_1 \in \mathbb{R}^{p_1}$, $\boldsymbol{\beta}_2 \in \mathbb{R}^{p_2}$, $\sigma^2 > 0$). Oletetaan, että $\boldsymbol{\beta}_1$ estimoidaan kuitenkin käyttäen mallia, josta \mathbf{X}_2 on jätetty pois (eli malliyhtälö on $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1 \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_*$). Laske näin saadun $\boldsymbol{\beta}_1$:n PNS-estimaattorin odotusarvo ja selvitä myös sen todennäköisyysjakauma. Milloin tämä estimaattori on harhaton?

3. Tarkastellaan kahta riippumatonta lineaarista mallia

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i \sim \mathbf{N}_{n_i}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_{n_i}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 \perp \boldsymbol{\varepsilon}_2, \quad \boldsymbol{\beta}_i \in \mathbb{R}^p, \quad \sigma^2 > 0, \quad r(\mathbf{X}_i) = p, \quad i = 1, 2.$$

Muodosta näistä matriiseja käyttäen yksi malli ja esitä parametrin $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}'_1 \ \boldsymbol{\beta}'_2]'$ PNS-estimaattorin lauseke. Mikä on saadun PNS-estimaattorin jakauma?

Aputulos: Jos \mathbf{A} ja \mathbf{B} ovat epäsingulaarisia neliömatriiseja, niin

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix}.$$

4. Tarkastellaan kahden riippumattoman normaalisen otoksen mallia

$$Y_1, \dots, Y_n \perp\!\!\!\perp, \quad Y_i \sim \begin{cases} \mathbf{N}(\mu_1, \sigma^2), & \text{kun } i = 1, \dots, n_1 \\ \mathbf{N}(\mu_2, \sigma^2), & \text{kun } i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2 = n \end{cases}$$

($\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, $n_1, n_2 > 1$). Estimoi parametrit μ_1 ja μ_2 ehdolla $\mu_1 = \mu_2$ (i) käyttäen monisteessa (s. 16) esitettyä rajoitetun PNS-estimaattorin kaavaa (2.8) ja (ii) ottamalla ehto $\mu_1 = \mu_2$ huomioon mallissa ja estimoimalla saadun mallin parametrit (eli käyttäen olennaisesti yhtälöön (2.9) perustuvaa vaihtoehtoista menettelyä).