Johdatus modulimuotoihin ja Linnikin ongelmaan

Ratkaisuehdotuksia kuudensiin laskuharjoituksiin

1. Olkoon $E_\kappa(z)$ normeerattu Eisensteinin sarja. Osoitettava, että on olemassa vakiot a ja b, joilla funktion $E_\kappa(z)$ Fourier-kertoimille a_n pätee

$$an^{\kappa-1} \leqslant |a_n| \leqslant bn^{\kappa-1}.$$

Ratkaisu. Olemme aiemmin todenneet, että $a_n \asymp \sigma_{\kappa-1}(n)$. Nyt alaraja on helppo:

$$a_n \asymp \sigma_{\kappa-1}(n) \geqslant n^{\kappa-1}.$$

Yläraja saadaan vaikkapa seuraavasti:

$$a_n \asymp \sigma_{\kappa-1}(n) = \sum_{d|n} d^{\kappa-1} = n^{\kappa-1} \sum_{d|n} \frac{1}{d^{\kappa-1}} \leqslant n^{\kappa-1}\,\zeta(\kappa-1).$$

———:———

2. Jatkettava loppuun korollaarin 88 todistus, eli todistettava, että

$$B_\chi \ll \left(q^{7/22}\, M^{7/11} + M^{7/8}\right) d(q)^2 \log M.$$

Ratkaisu. Väite seuraa, jos todistamme, että

$$B_\chi^2 \ll \left(q^{7/11}\, M^{14/11} + M^{7/4}\right) d^4(q) \log^2 M,$$

onhan positiivisilla reaaliluvuilla a ja b aina $\sqrt{a^2+b^2} \ll a+b$. Koska todistettava epäyhtälö on triviaali, kun $M < q^{7/8}$, onhan tällöin

$$B_\chi \ll M\, d(M) \ll (q^{7/8})^{4/11}\, M^{7/11}\, d(q) = q^{7/22}\, M^{7/11}\, d(q),$$

voimme huoletta olettaa, että $M \geqslant q^{7/8}$.

Aloitetaan muutamalla kätevällä arviolla. Ensiksikin,

$$\frac{q}{\varphi(q)} \ll d^\varepsilon(q)$$

mille tahansa $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Multiplikatiivisuuden vuoksi riittää tarkistaa tämä vain alkulukupotensseille p^α, missä $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, joille

$$\frac{p^\alpha}{\varphi(p^\alpha)} = \frac{p^\alpha}{p^\alpha\left(1-\frac{1}{p}\right)} = \frac{p}{p-1} \ll (\alpha+1)^\varepsilon = d^\varepsilon(p^\alpha).$$

Nämä tulokset voi yhdistää sen vuoksi, että riittävän isoilla p tässä arviossa esiintyväksi implisiittiseksi vakioksi voidaan valita yksi. Tulemme arvioimaan, että

$$\log L \ll \log\left(q^{1/8} + d^2(q)\right) \ll \log M$$

ja

$$\log(LM) \ll \log M.$$

Korollaarin 88 todistuksen alussa tehtyjen arvioiden nojalla on

$$B_\chi^2 \ll \frac{q^2 S}{L^2 \varphi^2(q)}.$$

Vertailemalla tätä lauseen 87 tulokseen näemme, että riittää arvioida

$$\begin{aligned}\frac{q^2\, M \log M \log L}{L\,\varphi(q)} &\ll \frac{q\, d^\varepsilon(q)\, M \log M \log M}{q^{4/11}\, M^{-3/11}} \\ &\ll q^{7/11}\, M^{14/11}\, d^4(q)\, \log^2 M,\end{aligned}$$

sekä samassa hengessä:

$$\begin{aligned}&\frac{q^2\, d(q)\, (LM)^{7/4} \log^2(LM)}{\varphi^2(q)} \\ &\qquad \ll d^\varepsilon(q)\, d(q)\, \Big(q^{7/11}\, M^{14/11} + M^{7/4}\, d^{7/4+\varepsilon}(q)\Big) \log^2 M \\ &\qquad\qquad \ll \Big(q^{7/11}\, M^{14/11} + M^{7/4}\Big)\, d^4(q) \log^2 M.\end{aligned}$$

———:———

3. Millainen on thetaryhmän Γ_ϑ perusalue?

Ratkaisu. Luennoilla on todistettu ryhmälle $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ hajotelma

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \Gamma_\vartheta \cup \Gamma_\vartheta T \cup \Gamma_\vartheta U,$$

missä oikean puolen sivuluokat ovat pareittain erillisiä. Tämä antaa aiheen määritellä ryhmän Γ_ϑ perusalueeksi

$$\mathcal{F}_\vartheta = \mathcal{F} \cup T\mathcal{F} \cup U\mathcal{F},$$

missä $\mathcal{F}$ on tietenkin vain tavanomainen modulaariryhmän perusalue.

Osoittaaksemme, että $\mathcal{F}_\vartheta$ on tosiaan kelvollinen ryhmän Γ_ϑ perusalue, on meidän osoitettava seuraavat kaksi seikkaa:

1. Jokaisella $z \in \mathbb{H}$ löytyy $w \in \overline{\mathcal{F}_\vartheta}$, jolle $z = Mw$ jollakin $M \in \Gamma_\vartheta$.
2. Jos z ja w ovat joukon $\mathcal{F}_\vartheta$ sisäpisteitä ja $z = Mw$ jollakin $M \in \Gamma_\vartheta$, niin itse asiassa $z = w$ ja $M = \pm I$.

Osoittautuu, että nämä ominaisuudet seuraavat helposti vastaavista modulaariryhmän perusalueen $\mathcal{F}$ ominaisuuksista.

1. Olkoon $z \in \mathbb{H}$. Tällöin löytyy $w' \in \overline{\mathcal{F}}$, jolle pätee $z = M'w'$ jollakin $M' \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Mutta yllä mainitun hajotelman nojalla $M' = MN$ joillakin $M \in \Gamma_\vartheta$ ja $N \in \{I, T, U\}$, mistä seuraa, että $z = M(Nw')$, missä tietenkin $Nw' \in \overline{\mathcal{F}_\vartheta}$.

2. Olkoot z ja w joukon $\mathcal{F}_\vartheta$ kaksi eri sisäpistettä, joilla $z = Mw$ jollakin $M \in \Gamma_\vartheta$. Nyt $Az \in \mathcal{F}$ ja $Bw \in \mathcal{F}$ joillakin $A, B \in \big\{I, T^{-1}, U^{-1}\big\}$, ja lisäksi

$$Az = AMB^{-1}(Bw),$$

mistä seuraa, että $Az = Bw$ ja $AMB^{-1} = \pm I$, eli $M = \pm A^{-1}B$. On helppo tarkistaa, että ainoa lausekkeen $A^{-1}B$ arvo, joka kuuluu ryhmään Γ_ϑ, on $\pm I$.

———:———

4. Olkoot f ja g painoa κ olevia kärkimuotoja ryhmän $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ suhteen ja olkoon $\mathcal{F}$ perusalue. Osoita, että sisätulo

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{\mathcal{F}} y^{\kappa}\, f(z)\,\overline{g(z)}\,\mathrm{d}\mu(z)$$

on hyvin määritelty (eli ei riipu perusalueen valinnasta), kun $\mathrm{d}\mu(z) = y^{-2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Ratkaisu. Olkoon $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, ja tarkastellaan muuttujanvaihtoa $w = \gamma z$, missä $w = u+iv$ ja $z = x+yi$, missä puolestaan u, v, x ja y ovat reaalimuuttujia ja $v > 0$ sekä $y > 0$. Todetaan ensiksi, että mitta $\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{v^2}$ säilyy muuttujanvaihdossa invarianttina. Nimittäin, tämän muuttujanvaihdon jakobiaanideterminantin itseisarvo on

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|^2 = \frac{1}{|cz+d|^4} = \frac{v^2}{y^2},$$

ja siten

$$\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{v^2} = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{v^2} = \frac{v^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2\,v^2} = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2}.$$

Oletetaan sitten, että $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, ja todetaan, että nyt myös integrandi säilyy tarkasteltavassa muuttujanvaihdossa invarianttina:

$$v^{\kappa}\, f(w)\,\overline{g(w)} = \frac{y^{\kappa}}{|cz+d|^{2\kappa}}\ (cz+d)^{\kappa}\ f(z)\,\overline{(cz+d)^{\kappa}\ g(z)} = y^{\kappa}\, f(z)\,\overline{g(z)}.$$