Johdatus modulimuotoihin ja Linnikin ongelmaan

Ratkaisuehdotuksia viidensiin laskuharjoituksiin

1. Todistettava

$$\sum_{n\leqslant M} d(n) = M\log M + (2\gamma-1)\,M + O(M^{1/3+\varepsilon}).$$

Ratkaisu. Käytetään luentomonisteen lauseen 80 antamaa katkaistua Voronoin summakaavaa parametrien arvoilla $h=0$, $k=1$ ja $N=\lfloor M^{1/3}\rfloor$. Nyt kyseisen summakaavan oikean puolen ensimmäinen termi antaa suoraan päätermit $M\log M+(2\gamma-1)\,M$ ja toinen termi on kiinteänä Estermannin funktion arvona varmasti $\ll 1 \ll M^{1/3+\varepsilon}$.

Arvioimalla summan $\sum_{n\leqslant N}$ sisältävää termiä kolmioepäyhtälöllä sekä arviolla $d(n)\ll n^{\varepsilon}$ antaa

$$\ll M^{1/4}\sum_{n\leqslant N} n^{\varepsilon-3/4},$$

ja koska

$$\sum_{n\leqslant N} n^{\varepsilon-3/4} \ll 1 + \int_1^N t^{\varepsilon-3/4}\,\mathrm{d}t \ll 1 + N^{\varepsilon+1/4} \ll M^{1/12+\varepsilon/3},$$

on tämä $\ll M^{1/3+\varepsilon}$.

Lopuksi, katkaistun kaavan virhetermi antaa

$$\ll M^{1/2+\varepsilon}\,N^{-1/2} \ll M^{1/2+\varepsilon-1/6} = M^{1/3+\varepsilon},$$

ja olemme valmiit.

——— : ———

2. Osoita, että kun $k\ll x^{1/4-\varepsilon}$, niin

$$A\!\left(x,\frac{h}{k}\right) \ll x^{\kappa/2}.$$

Ratkaisu. Käytetään katkaistua Voronoi-tyyppistä summakaavaa parametrilla $N=\lfloor x^{1/2}\rfloor$ ja arvioidaan kolmioepäyhtälöllä, jolloin eksponentti- ja kosinitekijät häviävät, sekä Delignen arviolla:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leqslant x} a(n)\,e\!\left(\frac{nh}{k}\right)\\
&\qquad\ll k^{1/2}\,x^{\kappa/2-1/4}\sum_{n\leqslant N}|a(n)|\;n^{-\kappa/2-1/4} + k\,x^{\kappa/2+\varepsilon}\,N^{-1/2}\\
&\qquad\ll x^{1/8-\varepsilon/2+\kappa/2-1/4}\sum_{n\leqslant N} n^{\kappa/2-1/2+\varepsilon-\kappa/2-1/4} + x^{1/4-\varepsilon+\kappa/2+\varepsilon-1/4}\\
&\qquad\ll x^{\kappa/2-1/8-\varepsilon/2}\sum_{n\leqslant N} n^{\varepsilon-3/4} + x^{\kappa/2}.
\end{aligned}$$

Nyt riittää enään arvioida:

$$\sum_{n\leqslant N} n^{\varepsilon-3/4} \ll 1 + \int_1^N t^{\varepsilon-3/4}\,\mathrm{d}t \ll 1 + N^{\varepsilon+1/4} \ll x^{\varepsilon/2+1/8}.$$

———:———

3. Osoita tehtävän 2 arvio jollekin laajemmalle joukolle, eli etsi jokin joukko $\mathcal{A}$ väliltä $[0,1]$, niin että kun $\alpha \in \mathcal{A}$, niin $A(x,\alpha) \ll x^{\kappa/2}$. Kuinka suuri tämä joukko on (asymptoottisesti toki se lähestyy nollaa, mutta jos ajatellaan x kiinnitetyksi, niin mikä on joukon koko)?

Ratkaisu. Valitsemalla edellisen tehtävän argumentissa $N = \lfloor k^{2/3}\,x^{1/3} \rfloor$ saamme arvion $A\big(x, \frac{h}{k}\big) \ll k^{2/3}\,x^{\kappa/2-1/6+\varepsilon'}$, joka pätee kunhan $k \leqslant x$. Nyt jokaisella $\alpha \in [0,1]$, joka on enintään etäisyydellä $\frac{1}{x}$ murtoluvusta, jonka nimittäjä on $\ll x^{1/4-\varepsilon}$, on esitys $\alpha = \frac{h}{k} + \eta$, missä $\eta \ll \frac{1}{x}$. Nyt osittaisintegroimalla saamme arvion

$$\begin{aligned}
A(x,\alpha) &= \sum_{n\leqslant x} a(n)\, e\bigg(\frac{nh}{k}\bigg)\, e(n\eta) \\
&= A\bigg(x, \frac{h}{k}\bigg)\, e(x\eta) - 2\pi i\eta \int_1^x A\bigg(t, \frac{h}{k}\bigg)\, e(t\eta)\,\mathrm{d}t \\
&\ll x^{\kappa/2} + \frac{1}{x}\int_k^x k^{2/3}\, t^{\kappa/2-1/6+\varepsilon'}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_1^k t^{\kappa/2+1/2+\varepsilon'}\,\mathrm{d}t \\
&\ll x^{\kappa/2} + \frac{1}{x}\cdot k^{2/3}\, x^{\kappa/2+5/6+\varepsilon'} + \frac{1}{x}\cdot \Big(x^{1/4-\varepsilon}\Big)^{\kappa/2+3/2+\varepsilon'} \\
&\ll x^{\kappa/2} + x^{-1+1/6-\varepsilon+\kappa/2+5/6+\varepsilon'} + x^{-1+\kappa/8+3/8-\varepsilon} \ll x^{\kappa/2}.
\end{aligned}$$

Tässä heittomerkit tarkoittavat, että kyseiset luvut ε' voidaan valita mielivaltaisen pieniksi vielä senkin jälkeen kun luvun k ylärajan $x^{1/4-\varepsilon}$ eksponentti on jo kiinnitetty.

Välit, joissa olemme todistaneet ylärajan $x^{\kappa/2}$, eli välit $\big[\frac{h}{k} - \frac{1}{x}, \frac{h}{k} + \frac{1}{x}\big]$, sekä $\big[0, \frac{1}{x}\big]$ ja $\big[1 - \frac{1}{x}, 1\big]$, missä $\frac{h}{k} \in\,]0,1[$, $(h,k) = 1$ ja $k \ll x^{1/4-\varepsilon}$, ovat erillisiä, kun x on riittävän iso. Nimittäin, kahden peräkkäisen kyseistä muotoa olevan murtoluvun $\frac{h}{k}$ ja $\frac{h'}{k'}$ etäisyys on

$$\left|\frac{hk' - h'k}{kk'}\right| = \frac{1}{kk'} \gg \frac{1}{x^{1/2-\varepsilon}}.$$

Täten sen välin $[0,1]$ osan, jossa olemme saavuttaneet halutun ylärajan, pituus on suuruusluokkaa

$$\asymp \frac{1}{x}\sum_{k\leqslant x^{1/4-\varepsilon}} \varphi(k) \asymp \frac{1}{x}\Big(x^{1/4-\varepsilon}\Big)^2 \asymp x^{-1/2-\varepsilon}.$$

———:———

4. Kuinka suuri $\varphi(s,r)$ on suoralla $\Re s = \frac{\kappa-1}{2} - \delta$, kun

$$\varphi(s,r) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, n^{-s}\, e(nr),$$

missä $r = \frac{h}{k}$?

Ratkaisu. Γ-funktion asymptotiikan antavasta Stirlingin kaavasta [kts. esim. Steinin ja Shakarchin teoksen *Complex Analysis* liitettä A] seuraa, että kiinteällä σ pätee

$$|\Gamma(s)| = \sqrt{2\pi}\, |t|^{\sigma-\frac{1}{2}}\ e^{-\frac{\pi|t|}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right) \quad \text{kun} \quad |t| \longrightarrow \infty.$$

Nyt Hecken funktionaaliyhtälöstä seuraa, että

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{\kappa-1}{2} - \delta + it, \frac{h}{k}\right) &= \frac{(-1)^{\frac{\kappa}{2}} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\kappa-2s} \Gamma(\kappa-s)\, \varphi\left(\kappa - s, -\frac{\overline{h}}{k}\right)}{\Gamma(s)} \\
&\ll \frac{k^{1+2\delta}\, |t|^{\kappa-\frac{\kappa-1}{2}+\delta-\frac{1}{2}}\ e^{-\frac{\pi|t|}{2}}\, \varphi\left(\frac{\kappa+1}{2} + \delta - it, -\frac{\overline{h}}{k}\right)}{|t|^{\frac{\kappa-1}{2}-\delta-\frac{1}{2}}\ e^{-\frac{\pi|t|}{2}}} \\
&\ll k^{1+2\delta}\, |t|^{1+2\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|}{n^{\frac{\kappa+1}{2}+\delta}} \ll k^{1+2\delta}\, |t|^{1+2\delta}\,.
\end{aligned}$$

kun $s = \frac{\kappa-1}{2} - \delta + it$ ja $|t| \longrightarrow \infty$.

———:———

5. Mikä on summan $A\bigl(x, \frac{h}{k}\bigr)$ tyypillinen koko, kun $k \ll x^{1/2-\varepsilon}$ (ja $x \longrightarrow \infty$)? (Vihje: Tarkastele neliön keskiarvon käytöstä, kun $x \longrightarrow \infty$.)

Ratkaisu. Luennoilla todistettiin, että kun $k \leqslant X$, on

$$\int\limits_X^{2X} \left|A\left(x, \frac{h}{k}\right)\right|^2 \mathrm{d}x = c\, k\, X^{\kappa+1/2} + O\bigl(k^2\, X^{\kappa+\varepsilon}\bigr) + O\Bigl(k^{3/2}\, X^{\kappa+1/4+\varepsilon}\Bigr),$$

kun $X \longrightarrow \infty$, missä c on vakio. Kun $k \ll X^{1/2-\varepsilon}$, ovat molemmat virhetermit $\ll k\, X^{\kappa+1/2-\varepsilon}$, eli päätermiä pienempiä. Täten itseisarvon neliön $\bigl|A\bigl(x, \frac{h}{k}\bigr)\bigr|^2$ keskiarvo välillä $[X, 2X]$ on $\asymp k\, X^{\kappa-1/2}$, mistä seuraa, että $\bigl|A\bigl(x, \frac{h}{k}\bigr)\bigr|$ on tyypillisesti suuruusluokkaa $\asymp k^{1/2}\, X^{\kappa/2-1/4}$.