JOHDATUS MODULIMUOTOIHIN JA LINNIKIN ONGELMAAN

5. LASKUHARJOITUKSET

(1) Todistettava
$$\sum_{n \le M} d(n) = M \log M + (2\gamma - 1)M + O\left(M^{1/3+\varepsilon}\right).$$
(2) Osoita, että kun $k \ll x^{1/4-\varepsilon}$, niin
$$B\left(x, \frac{h}{k}\right) \ll x^{1/2}$$
(eli vaihtoehtoisesti voi todistaa
$$A\left(x, \frac{h}{k}\right) \ll x^{\kappa/2}).$$
(3) Osoita tehtävän 2 arvio jollekin laajemmalle joukolle, eli etsi jokin joukko $\mathcal{A}$ väliltä $[0,1]$, niin että kun $\alpha \in \mathcal{A}$, niin $B(x, \alpha) \ll x^{1/2}$ (eli $A(x, \alpha) \ll x^{\kappa/2}$. Kuinka suuri tämä joukko on (asymptoottisesti toki se lähestyy nollaa, mutta jos ajatellaa x kiinnitetyksi, niin mikä on joukon koko)? (Vihje: Osittaissummaus on iloinen työkalu. Lisäksi kannattaa tehdä yleinen arvio rationaalilukuparametriselle summalle.)
(4) Kuinka suuri $\varphi(s, r)$ on suoralla $\Re z = \frac{\kappa-1}{2} - \delta$, kun
$$\varphi(s, r) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s} e(rn),$$
missä $r = \frac{h}{k}$?
(5) Mikä on summan $A\left(x.\frac{h}{k}\right)$ tyypillinen koko, kun $k \ll x^{1/2-\varepsilon}$ (ja $x \to \infty$). (Vihje: Tarkastele neliön keskiarvon käytöstä, kun $x \to \infty$.)