Johdatus modulimuotoihin ja Linnikin ongelmaan

Ratkaisuehdotuksia neljänsiin laskuharjoituksiin

1. Osoita, että $f(z) = \frac{1}{15}\left(16E_4(z) - E_4\left(\frac{z+1}{2}\right)\right) \in M_4(\Gamma_\vartheta)$.

Ratkaisu. Funktio f on suoraan Eisensteinin sarjan E_4 perusominaisuuksien nojalla holomorfinen puolitasossa $\mathbb{H}$ ja pisteessä ∞ ja lisäksi 2-jaksollinen. Riittää siis todistaa modulaarisuusehto

$$f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^4\, f(z)$$

kaikille $z \in \mathbb{H}$, sekä holomorfisuus ϑ-ryhmän toisessa kärjessä.

Koska $E_4\left(-\frac{1}{z}\right) = z^4\, E_4(z)$, modulaarisuusrelaatio seuraa jos osoitamme, että

$$E_4\left(\frac{-\frac{1}{z}+1}{2}\right) = z^4\, E_4\left(\frac{z+1}{2}\right).$$

Toimimalla matriisilla $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ näemme, että

$$E_4\left(\frac{-\frac{1}{z}+1}{2}\right) = \left(-2\cdot\frac{-\frac{1}{z}+1}{2}+1\right)^{-4} E_4\left(\frac{-\frac{-\frac{1}{z}+1}{2}+1}{-2\cdot\frac{-\frac{1}{z}+1}{2}+1}\right) = z^4\, E_4\left(\frac{z+1}{2}\right).$$

Riittää enään tarkastella funktion $f\mid_4 U$, missä $U = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, holomorfisuutta pisteessä ∞. Mutta tämäkin seikka on kunnossa, onhan:

$$\begin{aligned}
\big(15f\mid_4 U\big)(z) &= 16\, z^{-4}\, E_4\left(1-\frac{1}{z}\right) - z^{-4}\, E_4\left(\frac{1-\frac{1}{z}+1}{2}\right) \\
&= 16\, z^{-4}\, E_4\left(-\frac{1}{z}\right) - z^{-4}\, E_4\left(-\frac{1}{2z}\right) \\
&= 16\, z^{-4}\, z^4\, E_4(z) - z^{-4}\,(2z)^4\, E_4(2z) \\
&= 16\, E_4(z) - 16\, E_4(2z)\,.
\end{aligned}$$

———:———

2. Osoita, että $\vartheta^8 = f$ (missä f on sama kuin ensimmäisessä tehtävässä). Totea lisäksi, että $r_8(n) = 16\sum_{d\mid n}(-1)^{n-d}\, d^3$.

Ratkaisu. Tiedämme jo, että $\vartheta^8, f \in M_4(\Gamma_\vartheta)$. Todistuksemme idea tulee olemaan sama kuin luentojen Jacobin neljän neliön lauseen todistuksessa. Käytämme luentomonisteen lausetta 56 valinnoilla $\Lambda = \Lambda^\star = \Gamma_\vartheta$, $\kappa = 4$, $\ell = 3$ ja $n = 2$. Riittää, että vertailemme $\frac{\kappa\ell n}{12} + 1 = \frac{4\cdot3\cdot2}{12} + 1 = 3$ ensimmäistä Fourier-kerrointa, ja osoitamme, että todistettavan identiteetin oikea puoli antaa funktion f Fourier-kertoimet.

Aiemmin kurssilla lasketusta Eisensteinin sarjan G_4 Fourier-kehitelmästä ja yleisesti tunnetusta tiedosta $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ on helppo laskea, että

$$E_4(z) = 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)\, q^n.$$

Tästä saadaan funktiolle f Fourier-sarja

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{15}\left(16E_4(z) - E_4\left(\frac{z+1}{2}\right)\right) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16\cdot 240}{15}\,\sigma_3(n)\,e(nz) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{240}{15}\,\sigma_3(n)\,e\Big(\frac{nz}{2}\Big)\,(-1)^n \\
&= 1 + 16\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, e^{\pi i n z},
\end{aligned}$$

missä

$$\alpha_n = \begin{cases} 16\sigma_3\big(\frac{n}{2}\big) - \sigma_3(n)\,, & \text{kun } 2 \mid n, \text{ ja} \\ \sigma_3(n)\,, & \text{kun } 2 \nmid n. \end{cases}$$

Nyt, jos $n \in \mathbb{Z}_+$ on pariton, niin jokainen $d \mid n$ on myös pariton, ja tekijä $(-1)^{n-d}$ on välttämättä parillinen, eli

$$\alpha_n = \sigma_3(n) = \sum_{d\mid n} (-1)^{n-d}\, d^3.$$

Toisaalta, jos $n \in \mathbb{Z}_+$ on parillinen, niin on

$$\begin{aligned}
\sum_{d\mid n} (-1)^{n-d}\, d^3 &= \sum_{d\mid n} (-1)^{d}\, d^3 = \sum_{\substack{d\mid n\\ 2\mid d}} d^3 - \sum_{\substack{d\mid n\\ 2\nmid d}} d^3 = 2\sum_{\substack{d\mid n\\ 2\mid d}} d^3 - \sum_{d\mid n} d^3 \\
&= 2\sum_{d\mid \frac{n}{2}} (2d)^3 - \sigma_3(n) = 16\sigma_3\Big(\frac{n}{2}\Big) - \sigma_3(n) = \alpha_n.
\end{aligned}$$

Riittää enään vertailla ensimmäisiä Fourier-kertoimia: tietenkin

$$r_8(0) = 1, \quad r_8(1) = 16, \quad \text{ja} \quad r_8(2) = 112.$$

Toisaalta, funktion f Fourier-kehitelmän vakiokerroin oli 1, ja

$$16\alpha_1 = 16\sigma_3(1) = 16,$$

sekä

$$16\alpha_2 = 16\,\big(16\sigma_3(1) - \sigma_3(2)\big) = 16\,(16-9) = 16\cdot 7 = 112.$$

———:———

3. Olkoot Fourier-kertoimet $a(n) = n^{(\kappa-1)/2}\, b(n)$ Hecken ominaisarvoja. Osoitettava, että tällöin Dirichlet'n sarjalla on esitys Eulerin tulona:

$$\widetilde{\varphi}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\, n^{-s} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{b(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}.$$

Ratkaisu. Olkoon $\Re s > 1$. Koska normalisoidun Hecken ominaisfunktion Fourier-kertoimet ovat multiplikatiivisia, on

$$\widetilde{\varphi}(s) = \prod_{p} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b(p^\ell)}{p^{\ell s}}.$$

Riittää siis osoittaa, että

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b\bigl(p^\ell\bigr)}{p^{\ell s}} = \frac{1}{1 - \dfrac{b(p)}{p^s} + \dfrac{1}{p^{2s}}}.$$

Ja näin onkin:

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{p^{2s}}\right) \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b(p^\ell)}{p^{\ell s}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{b(p^\ell)}{p^{\ell s}} + \frac{b(p^\ell)}{p^{(\ell+2)s}}\right) = 1 + \frac{b(p)}{p^s} + \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{b(p^{\ell-2}) + b(p^\ell)}{p^{\ell s}} \\ &= 1 + \frac{b(p)}{p^s} + \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{b(p^{\ell-1})\, b(p)}{p^{\ell s}} = 1 + \frac{b(p)}{p^s} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b(p^\ell)}{p^{\ell s}}.\end{aligned}$$

——— : ———

4. Olkoot $\tau = \frac{h}{k} + \frac{iz}{k}$ ja $\tau' = -\frac{-\overline{h}}{k} + \frac{i}{zk}$. Osoita, että $f(\tau') = (-1)^{\kappa/2}\, z^\kappa\, f(\tau)$.

Ratkaisu. Vertaamalla todistettavaa funktionaaliyhtälöä modulimuodon määritelmään nähdään, että riittää löytää matriisi $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, jolle

$$\tau' = f_M(\tau) \quad \text{ja} \quad c\tau + d = iz.$$

Koska jälkimmäinen näistä tarkoittaa sitä, että

$$\frac{ch}{k} + \frac{ciz}{k} + d = iz,$$

on (merkkien valintaa vaille) oltava $c = k$ ja $d = -h$.

Seuraavaksi todetaan, että koska

$$f_M(\tau) = \frac{a\frac{h+iz}{k} + b}{k\frac{h+iz}{k} - h} = \frac{ah + bk + aiz}{kiz} = \frac{a}{k} - \frac{(ah + bk)\, i}{kz},$$

on $\tau' = f_M(\tau)$, kunhan vain $a = -\overline{h}$ ja $ah + bk = -1$, eli kun $a = -\overline{h}$ ja $b = \frac{h\overline{h}-1}{k}$.

Lopuksi, näin konstruoitu matriisi M kuuluu ryhmään $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, sillä

$$\det \begin{pmatrix} -\overline{h} & \frac{h\overline{h}-1}{k} \\ k & -h \end{pmatrix} = h\overline{h} - k\frac{h\overline{h} - 1}{k} = 1.$$

——— : ———

5. Kirjoita funktionaaliyhtälön vasen puoli niin, että purat gammafunktion integraaliesitykseen (merk. $e\left(\frac{x}{k}\right) = e_k(x)$):

$$\begin{aligned}\left(\frac{k}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)\, \varphi(s, h/k) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, e_k(nh) \int_0^\infty x^{s-1}\, e^{-2\pi n x/k}\, \mathrm{d}x \\ = \int_0^\infty x^{s-1}\, f\left(\frac{h}{k} + \frac{ix}{k}\right) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ota integraali välillä $]0,1[$ erityiseen tarkasteluun, käytä edellisen tehtävän kaavaa siihen ja tee muuttujanvaihto niin, että integraali vaihtuu väliltä $]0,1[$ välille $]1,\infty[$. Summaa tämä integraali alkuperäisen välin $]1,\infty[$ yli olevan integraalin kanssa yhteen ja manipuloi saavuttaaksesi seuraavan tehtävän lähtökohdan (ks. kaavarivi).

Ratkaisu. Ensimmäinen tehtävän osa perustuu sopiviin muuttujanvaihtoihin Γ-funktion määrittelevässä integraalissa: kun $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$, on

$$\begin{aligned}
\left(\frac{k}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)\,\varphi\left(s,\frac{h}{k}\right) &= \left(\frac{k}{2\pi}\right)^s \int_0^\infty e^{-t}\,t^{s-1}\,\mathrm{d}t \sum_{n=1}^\infty \frac{a(n)\,e\left(\frac{nh}{k}\right)}{n^s} \\
&= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty a(n)\,e\left(\frac{nh}{k}\right) e^{-t}\left(\frac{tk}{2\pi n}\right)^{s-1} \frac{k\,\mathrm{d}t}{2\pi n} \\
&= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty a(n)\,e\left(\frac{nh}{k}\right) e^{-\frac{2\pi n t}{k}}\,t^{s-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty a(n)\,e\left(\frac{nh}{k}+\frac{nti}{k}\right) t^{s-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty f\left(\frac{h}{k}+\frac{ti}{k}\right) t^{s-1}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Jälkimmäinen osa on suoraviivainen:

$$\int_0^1 f\left(\frac{h}{k}+\frac{it}{k}\right) t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 i^\kappa\,t^{-\kappa} f\left(-\frac{\overline{h}}{k}+\frac{i}{tk}\right) t^{s-1}\,\mathrm{d}t = i^\kappa \int_1^\infty f\left(-\frac{\overline{h}}{k}+\frac{it}{k}\right) t^{\kappa-s-1}\,\mathrm{d}t.$$

Täten

$$\left(\frac{k}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)\,\varphi\left(s,\frac{h}{k}\right) = \int_1^\infty \left(f\left(\frac{h}{k}+\frac{it}{k}\right) t^{s-1} + i^\kappa\,f\left(-\frac{\overline{h}}{k}+\frac{it}{k}\right) t^{\kappa-s-1}\right) \mathrm{d}t.$$

———:———

6. Osoita, että edellisen kohdan kaksi integraalia välin $]1,\infty[$ yli:

$$\int_1^\infty \left(x^{s-1}\,f\left(\frac{h}{k}+\frac{ix}{k}\right) + (-1)^{\kappa/2}\,x^{\kappa-1-s}\,f\left(-\frac{\overline{h}}{k}+\frac{ix}{k}\right)\right)\mathrm{d}x$$

ovat yhtäpitäviä funktionaaliyhtälön oikean puolen kanssa.

Ratkaisu. Merkitään kyseistä integraalia $\Phi\left(s,\frac{h}{k}\right)$. On helppo vakuuttua siitä, että integraalit $\Phi\left(s,\frac{h}{k}\right)$ ja $\Phi\left(s,-\frac{\overline{h}}{k}\right)$ suppenevat itseisesti kaikilla $s\in\mathbb{C}$ ja vieläpä tasaisesti jokaisessa kompleksitason kompaktissa joukossa ja määrittelevät siis kokonaiset analyyttiset funktiot; häviäähän f äärettömyydessä eksponentiaalisen nopeasti. Mutta nyt näille jatkeille selvästi pätee

$$\Phi\left(s,\frac{h}{k}\right) = i^\kappa\,\Phi\left(\kappa-s,-\frac{\overline{h}}{k}\right).$$

Funktioiden Φ analyyttisistä jatkeista seuraa, että itse asiassa myös $\varphi\big(s, \frac{h}{k}\big)$ ja $\varphi\Big(s, -\frac{\overline{h}}{k}\Big)$ jatkuvat kokonaisiksi analyyttisiksi funktioiksi, joille on pädettävä

$$\left(\frac{k}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)\,\varphi\left(s, \frac{h}{k}\right) = i^\kappa \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\kappa - s} \Gamma(\kappa - s)\,\varphi\left(\kappa - s, -\frac{\overline{h}}{k}\right).$$