JOHDATUS MODULIMUOTOIHIN JA LINNIKIN ONGELMAAN

4. LASKUHARJOITUKSET

(1) Osoita, että $f(z) = \frac{1}{15}\left(16E_4(z) - E_4\left(\frac{z+1}{2}\right)\right) \in M_4(\Gamma_\vartheta)$.

(2) Osoita, että $\vartheta^8 = f$ (missä f on sama kuin ensimmäisessä tehtävässä. Totea lisäksi, $r_8(n) = 16\sum_{d|n}(-1)^{m-d}d^3$.

(3) Olkoot Fourier-kertoimet $a(n) = n^{(\kappa-1)/2}b(n)$ Hecken ominaisarvoja. Osoitettava, että tällöin Dirichlet'n sarjalla on esitys Eulerin tulona:

$$\tilde{\varphi}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)n^{-s} = \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1 - \frac{b(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}.$$

(4) Olkoon $\tau = \frac{h}{k} + \frac{iz}{k}$ ja $\tau' = -\frac{\overline{h}}{k} + \frac{i}{zk}$. Osoita, että $f(\tau') = (-1)^{\kappa/2}z^{\kappa}f(\tau)$.

(5) Kirjoita funktionaaliyhtälön vasen puoli niin, että purat gammafunktion integraaliesitykseen (merk. $e\left(\frac{x}{k}\right) = e_k(x)$):

$$\left(\frac{k}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)\varphi(s, h/k) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e_k(nh)\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-2\pi nx/k}dx = \int_0^{\infty} x^{s-1}f\left(\frac{h}{k} + \frac{ix}{k}\right)dx.$$

(Sekoilin tässä ilmeisesti taululla, ja unohdin sujuvasti yhden muuttujanvaihdon! Olen pahoillani. Tässä integraalit lienevät kuitenkin kunnossa.) Ota integraali välillä $(0, 1)$ erityiseen tarkasteluun, käytä kohdan 1) kaavaa siihen ja tee muuttujanvaihto niin, että integraali vaihtuu väliltä $(0, 1)$ välille $(1, \infty)$. Summaa tämä integraali alkuperäisen välin $(1, \infty)$ yli olevan integraalin kanssa yhteen ja manipuloi saavuttaaksesi seuraavan tehtävän lähtökohta (ks. kaavarivi).

(6) Osoita, että edellisen kohdan kaksi integraalia välin $(1, \infty)$ yli:

$$\int_1^{\infty}\left(x^{s-1}f\left(\frac{h}{k} + \frac{ix}{k}\right) + (-1)^{\kappa/2}x^{\kappa-1-s}f\left(-\frac{\overline{h}}{k} + \frac{ix}{k}\right)\right)dx$$

ovat yhtäpitäviä funktionaaliyhtälön oikean puolen kanssa.