Johdatus modulimuotoihin ja Linnikin ongelmaan

Ratkaisuehdotuksia kolmansiin laskuharjoituksiin

1. Osoitettava, että theta-funktiolle pätee

$$\vartheta(z) + \vartheta(z+1) = 2\vartheta(4z)$$

sekä

$$\vartheta\left(1 - \frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}}\,(\vartheta(z/4) - \vartheta(z)) = \sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n+1/2)^2 z}.$$

Ratkaisu. Ensimmäinen identiteetti seuraa funktion ϑ määritelmästä ja siitä, että lauseke $1 + e^{\pi i n^2}$ on yhtä kuin kaksi tai nolla sen mukaan onko n parillinen vai pariton kokonaisluku:

$$\begin{aligned}\vartheta(z) + \vartheta(z+1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 (z+1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 + e^{\pi i n^2}\right) e^{\pi i n^2 z} \\ &= 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (2m)^2 z} = \vartheta(4z)\,.\end{aligned}$$

Toinen identiteetti seuraa ensimmäisestä ja luentomonisteen lauseessa 34 todistetusta ϑ-funktion transformaatiokaavasta $\vartheta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}}\vartheta(z)$:

$$\begin{aligned}\vartheta\left(1 - \frac{1}{z}\right) &= 2\vartheta\left(-\frac{4}{z}\right) - \vartheta\left(-\frac{1}{z}\right) = 2\sqrt{\frac{z/4}{i}}\vartheta\left(\frac{z}{4}\right) - \sqrt{\frac{z}{i}}\vartheta(z) \\ &= \sqrt{\frac{z}{i}}\vartheta\left(\frac{z}{4}\right) - \sqrt{\frac{z}{i}}\vartheta(z) = \sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i n^2 z}{4}} - \sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i (2m)^2 z}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i (2m+1)^2 z}{4}} = \sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 z}.\end{aligned}$$

——— : ———

2. Olkoon $\eta(z) = e^{\pi i z/12} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i m z}\right)$ ja $f(z) = \frac{\eta'(z)}{\eta(z)}$. Miten funktio f liittyy funktioon $G_2(z)$?

Ratkaisu. On helppo todeta, että η-funktion määrittelevä ääretön tulo suppenee kaikilla $z \in \mathbb{H}$ kohti ylemmässä puolitasossa analyyttistä funktiota, jolla ei voi olla nollakohtia. [Vrt. esim. kappaleeseen 5.3 E. Steinin ja R. Shakarchin kirjassa *Complex Analysis*.]

Lasketaan ensin äärettömän tulon logaritminen derivaatta: koska

$$\log \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i m z}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \log\left(1 - e^{2\pi i m z}\right) = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m \ell z}}{\ell},$$

on

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \log \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i m z}\right) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2\pi i m \ell e^{2\pi i m \ell z}}{\ell} \\ &= -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)\, e^{2\pi i n z}.\end{aligned}$$

Tästä näemme, että

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\pi i}{12} - 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)\, e^{2\pi i n z} \\
&= \frac{i}{4\pi}\left(\frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)\, e^{2\pi i n z}\right) = \frac{i}{\pi 4} G_2(z)\,.
\end{aligned}
$$

———:———

3. Todista, että painoa 12 olevalle kärkimuodolle $\Delta(z)$ pätee

$$
\Delta(z) = e^{2\pi i z} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i m z}\right)^{24}
$$

käyttäen hyväksi edellistä harjoitustehtävää sekä tarkastellen funktion $\frac{\eta(i/y)}{\eta(iy)\sqrt{y}}$ logaritmista derivaattaa.

Ratkaisu. Olkoon Δ siis se yksikäsitteinen painoa 12 olevan kärkimuoto, jonka ensimmäinen Fourier-kerroin (vakiotermin jälkeen) on yhtä kuin yksi. Tavoite on siis osoittaa, että itse asiassa $\Delta = \eta^{24}$.

Edellisen harjoitustehtävän ja luentomonisteen lauseessa 38 todistetun funktion G_2 transformaatiokaavan nojalla lausekkeen $\frac{\eta(i/y)}{\eta(iy)\sqrt{y}}$ määräämän funktion logaritminen derivaatta on

$$
\begin{aligned}
&\frac{i}{4\pi} G_2\left(\frac{i}{y}\right)\frac{-i}{y^2} + \frac{i}{4\pi} G_2(iy)\, i - \frac{1}{2y} \\
&\qquad = \frac{1}{4\pi y^2}\left(-y^2 G_2(iy) + 2\pi y\right) + \frac{G_2(yi)}{4\pi} - \frac{1}{2y} = 0
\end{aligned}
$$

kaikilla $y \in \mathbb{R}_+$. Lauseke $\frac{\eta(i/y)}{\eta(iy)\sqrt{y}}$ määrää siis vakiofunktion. Sijoittamalla $y = i$ nähdään, että kyseinen vakio on yksi. Tästä saadaan transformaatiokaava

$$
\eta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}}\,\eta(z)\,,
$$

joka pätee kaikilla $z \in \mathbb{H}$.

Nyt tiedämme, että funktio η^{24} on koko ylemmässä puolitasossa analyyttinen funktio, jolle

$$
\eta^{24}(z+1) = \eta^{24}(z) \quad \text{ja} \quad \eta^{24}\left(-\frac{1}{z}\right) = z^{12}\eta(z)
$$

kaikilla $z \in \mathbb{H}$. Lopuksi, koska suoraan tuloesityksen nojalla

$$
\eta(z) \longrightarrow 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\eta^{24}(z)}{e^{2\pi i z}} \longrightarrow 1,
$$

kun $\Im z \longrightarrow \infty$, olemme valmiit.

———:———

4. Osoita, että indeksi $[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}):\Gamma(n)]$ voidaan laskea kaavasta

$$[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}):\Gamma(n)] = n^3 \prod_{p|n} \left(1-p^{-2}\right).$$

Ratkaisu. Lauseen 41 nojalla kysytty indeksi on yhtä suuri kuin $\#\Gamma_n$, eli riittää laskea $\#\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_n)$. Kiinalaisen jäännöslauseen mukaan

$$\mathbb{Z}_n \cong \prod_{p^\alpha \| n} \mathbb{Z}_{p^\alpha},$$

mistä seuraa, että

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_n) \cong \prod_{p^\alpha \| n} \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_{p^\alpha}),$$

eli riittää osoittaa, että $\#\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_{p^\alpha}) = p^{3\alpha}\left(1-p^{-2}\right)$ kaikilla alkuluvuilla p ja positiivisilla kokonaisluvuilla α.

Todetaan seuraavaksi, että $\#\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_{p^\alpha}) = p^{-\alpha}\left(1-p^{-1}\right)^{-1}\#\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_{p^\alpha})$, missä $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_{p^\alpha})$ on kääntyvien $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$-kertoimisten 2×2-matriisien ryhmä. Nimittäin, onhan $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_{p^\alpha})$ determinanttikuvauksen

$$\det\colon \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_{p^\alpha}) \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^\alpha}^\times$$

ydin. Riittää siis osoittaa, että $\#\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_{p^\alpha}) = p^{4e}\left(1-p^{-2}\right)\left(1-p^{-1}\right)$.

Matriisiryhmän $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_p)$ koko on helppo laskea; se on $(p-1)^2\left(p^2+p\right) = \left(p^2-1\right)\left(p^2-p\right)$. Tarkastellaan seuraavaa reduktiota $\pmod p$,

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_{p^\alpha}) \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_p),$$

joka on selvästi surjektiivinen homomorfismi. Reduktion φ ydin koostuu täsmälleen niistä $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$-kertoimisista 2×2-matriiseista, joiden lävistäjäelementit ovat kongruentteja luvun 1 ja muut elementit kongruentteja luvun 0 kanssa modulo p. Siten $\#\operatorname{Ker}\varphi = p^{4\alpha-4}$ ja

$$\#\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_{p^\alpha}) = p^{4\alpha-4}\left(p^2-1\right)\left(p^2-p\right) = p^{4\alpha}\left(1-p^{-2}\right)\left(1-p^{-1}\right),$$

kuten pitääkin.

———:———

5. Todista:

$$\Gamma_\vartheta = \Gamma(2) \cup \Gamma(2)\,S,$$

missä $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Lisäksi $[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}):\Gamma_\vartheta] = 3$.

Ratkaisu. Aloitetaan huomauttamalla, että $\Gamma(2) \subseteq \Gamma_\vartheta$. Tämä seuraa esimerkiksi siitä, että edellisellä ryhmällä on virittäjistö joka koostuu matriiseista

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{sekä} \quad STS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tämän voi todistaa samassa hengessä kuin sen, että T ja S virittävät ryhmän $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Tällä kertaa voi vaikkapa katsoa matriisien vasempia sarakkeita ja pienentää niiden elementtejä systemaattisesti kertomalla yllä mainituilla matriiseilla vasemmalta kunnes vasemmassa alanurkassa on nolla.

Olkoon G niiden matriisien $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ ryhmä, joille $M \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tai $M \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ modulo 2. Nyt $\Gamma(2) \subsetneq \Gamma_\vartheta \subseteq G \subsetneq \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, missä aidot inkluusiot ovat aitoja vaikkapa siksi, että

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin \Gamma(2)\,, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma_\vartheta, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin G, \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\,,$$

ja keskimmäinen inkluusio pätee yksinkertaisesti siksi, ryhmän Γ_ϑ virittäjät selvästi kuuluvat ryhmään G.

Nyt, koska edellisen tehtävän nojalla $[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma(2)] = 6$, on itse asiassa oltava $G = \Gamma_\vartheta$, mistä heti seuraa hajotelma $\Gamma_\vartheta = \Gamma(2) \cup \Gamma(2)\,S$. Lisäksi tämän hajotelman nojalla $[\Gamma_\vartheta : \Gamma(2)] = 2$, ja siis

$$[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma_\vartheta] = 3.$$