JOHDATUS MODULIMUOTOIHIN JA LINNIKIN ONGELMAAN

3. LASKUHARJOITUKSET

(1) Osoitettava, että theta-funktiolle pätee

$$\vartheta(z)+\vartheta(z+1)=2\vartheta(4z)$$

sekä (osin edellisen korollaarina)

$$\vartheta\left(1-\frac{1}{z}\right)=\sqrt{\frac{z}{i}}\,(\vartheta(z/4)-\vartheta(z))=\sqrt{\frac{z}{i}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\pi i(n+1/2)^2 z}.$$

(2) Olkoon $\eta(z)=e^{\pi iz/12}\prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{2\pi imz})$ ja $f(z)=\frac{\eta'(z)}{\eta(z)}$. Miten funktio f liittyy funktioon $G_2(z)$?

(3) Todista, että painoa 12 olevalle kärkimuodolle $\Delta(z)$ pätee

$$\Delta(z)=e^{2\pi iz}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi imz}\right)^{24}$$

käyttäen hyväksi edellistä harjoitustehtävää sekä tarkastellen funktion $\frac{\eta(i/y)}{\eta(iy)\sqrt{y}}$ logaritmista derivaattaa.

(4) Osoita, että indeksi $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}):\Gamma(n)$ voidaan laskea kaavasta

$$[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}):\Gamma(n)]=n^3\prod_{p|n}\left(1-p^{-2}\right).$$

(5) Todista:

$$\Gamma_\vartheta=\gamma(2)\cup\Gamma(2)S,$$

missä $S=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$. Lisäksi $[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}):\Gamma_\vartheta]=3$.