Johdatus modulimuotoihin ja Linnikin ongelmaan

Ratkaisuehdotuksia toisiin laskuharjoituksiin

1. Osoita, että

$$G_k(\tau) = \sum_{m^2+n^2\neq 0; m,n\in\mathbb{Z}} (m+n\tau)^{-k}$$

on painoa k oleva modulimuoto, kun $k \geqslant 4$ on parillinen kokonaisluku.

Ratkaisu. Osoitetaan ensiksi, että funktion $G_k(\tau)$ määrittelevä sarja suppenee itseisesti jokaisella $\tau \in \mathbb{H}$.

Merkitään pisteiden $m + n\tau$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ muodostamaa hilaa kirjaimella Λ. Olkoon $N \in \mathbb{Z}_+$ mielivaltainen, ja koostukoot Λ_N niistä hilan Λ pisteistä, jotka ovat sen suunnikkaan reunalla, jonka kärjet ovat $\pm N \pm N\tau$ ja $\pm N \mp N\tau$. Näitä pisteitä on $8N$ kappaletta, ja jokainen origosta poikkeava hilan Λ piste kuuluu täsmälleen yhteen joukoista $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ Olkoon joukkoa Λ_1 vastaavan suunnikkaan etäisyys origosta d. Joukkoa Λ_N vastaavan suunnikkaan etäisyys origosta on tällöin Nd. Voimme siis verrata funktion $G_k(\tau)$ määrittelevää sarjaa positiivitermiseen sarjaan

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{8N}{(Nd)^k} \leqslant \frac{8}{d^k} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{k-1}} < \infty.$$

Nyt seitsemännessä tehtävässä todistetusta funktion $G_k(\tau)$ Fourier-kehitelmästä seuraa, että se on analyyttinen sekä ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$, että pisteessä ∞. Lisäksi selvästi $G_k(\tau + 1) = G(\tau)$ kaikilla $\tau \in \mathbb{H}$.

Riittää siis enään osoittaa, että

$$G_k\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k G_k(\tau)$$

kun $\tau \in \mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}
G_k\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sum_{m^2+n^2\neq 0; m,n\in\mathbb{Z}} \left(m - \frac{n}{\tau}\right)^{-k} \\
&= \tau^k \sum_{m^2+n^2\neq 0; m,n\in\mathbb{Z}} (-n + m\tau)^{-k} \\
&= \tau^k \sum_{m^2+n^2\neq 0; m,n\in\mathbb{Z}} (n + m\tau)^{-k} = \tau^k G_k(\tau)\,.
\end{aligned}$$

———:———

2. Konstruoi funktioiden G_k avulla kärkimuoto (joka ei ole identtisesti nolla).

Ratkaisu. Seitsemännen tehtävän nojalla modulimuodon G_4 Fourier-sarjan vakiokerroin on $2\zeta(4)$ ja modulimuodon G_6 Fourier-sarjan vakiokerroin on $2\zeta(6)$. Siispä painoa 12 olevan modulimuodon $\zeta^2(6)\, G_4^3 - 2\zeta^3(4)\, G_6^2$ vakiokerroin häviää, eli se on kärkimuoto. Toisaalta, se ei voi hävitä identtisesti luentomonisteen lauseen 30 nojalla, joka sanoo, että modulimuodot G_4^3 ja G_6^2 ovat lineaarisesti riippumattomia.

———:———

3. Kirjoitetaan $j(g,z) = cz + d$, kun $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Osoita, että

$$j(g_1g_2, z) = j(g_1, g_2(z))\, j(g_2, z)$$

ja

$$(f \,|\, (g_1g_2))(z) = ((f \,|\, g_1) \,|\, g_2)(z)\,,$$

kun $g_1, g_2 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

Ratkaisu. Olkoot $g_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ ja $g_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, ja olkoon $z \in \mathbb{H}$. Nyt

$$g_1g_2 = \begin{pmatrix} * & * \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

ja on helppo laskea

$$\begin{aligned} j\big(g_1, g_2(z)\big)\, j(g_2, z) &= \left(c \cdot \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + d\right)(\gamma z + \delta) \\ &= c\,(\alpha z + \beta) + d\,(\gamma z + \delta) = (c\alpha + d\gamma)\, z + (c\beta + d\delta) = j(g_1g_2, z)\,. \end{aligned}$$

Nyt mielivaltaisella $f\colon \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ pätee

$$\begin{aligned} \big((f \,|\, g_1) \,\big|\, g_2\big)(z) &= \big(f(g_1\cdot)\, j(g_1, \cdot)^{-k} \,\big|\, g_2\big)(z) \\ &= f(g_1g_2z)\, j(g_1, g_2z)^{-k}\, j(g_2, z)^{-k} = f(g_1g_2z)\, j(g_1g_2, z)^{-k} \\ &= \big(f \,\big|\, g_1g_2\big)(z)\,. \end{aligned}$$

———:———

4. Todista: Olkoon $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ ja $z \in \mathbb{H}$. Tällöin

$$\mathrm{ord}(f, z) = \mathrm{ord}(f, M(z))\,,$$

kun f on modulifunktio.

Ratkaisu. Olkoon $f \not\equiv 0$ modulifunktio, ja olkoon matriisin M alemman rivin elementit c ja d. Suoraan modulifunktion määritelmän nojalla pätee

$$f(Mz) = (cz + d)^k\, f(z)$$

kaikissa niissä pisteissä $z \in \mathbb{H}$, joissa funktioilla $f(M\cdot)$ ja $f(\cdot)$ ei ole napoja. Koska lausekkeen $(cz + d)^k$ määräämällä funktiolla ei ole napoja eikä nollakohtia ylemmässä puolitasossa, täytyy funktioilla $f(M\cdot)$ ja $f(\cdot)$ olla samat kertaluvut kaikkialla.

———:———

5. Todista painokaava tilanteessa, jossa perusalueen reunoilla on nollakohtia tai napoja (jotka eivät ole i, $e^{\pi i/3}$ tai $e^{2\pi i/3}$). Tarkasti ottaen tässä riittää täydentää monisteen todistus tähän tilanteeseen.

Ratkaisu. On tarkasteltava kahta eri tapausta. Jos tarkasteltavalla modulifunktiolla on nollakohta tai napa $z \notin \{e^{\pi i/3}, e^{2\pi i/3}\}$ jolle $\Re z = \pm\frac{1}{2}$, niin voimme imaginaariakselin suuntaisissa integraaleissa kiertää pisteet $z \mp 1$ sanokaamme oikealta puolelta pitkin riittävän pieniä yhteneviä $z \mp 1$-keskisiä ympyränkaaria, jolloin integraalit edelleen kumoavat toisensa samasta syystä kuin aiemminkin. (Integrandit ovat yhtä suuret 1-jaksollisuuden takia, integroimistiet käydään vastakkaisiin suuntiin.) Toisaalta integroimistie kiertää pisteen z tai $z+1$ ympäri, mistä saadaan kertaluvun $\operatorname{ord}(f, z)$ sisältävä termi.

Jos taas tarkasteltavalla modulifunktiolla on nollakohta tai napa perusalueen reunan pisteessä $z \notin \{i, e^{\pi i/3}, e^{2\pi i/3}\}$, jolle $|z| = 1$, niin voimme integraalissa yksikköympyrän kaaren yli kiertää molemmat pisteet z ja $-\frac{1}{z}$ yläpuolelta pitkin riittävän pieniä yhteneviä z- ja $-\frac{1}{z}$-keskisiä ympyränkaaria. Nyt sama ajatuksenkulku, joka tuotti termin $-\frac{1}{2}\operatorname{ord}(f, i)$, tuottaa pienistä ympyränkaarista rajalla lisätermit $-\frac{1}{2}\operatorname{ord}(f, z)$ ja $-\frac{1}{2}\operatorname{ord}\big(f, -\frac{1}{z}\big)$, joiden summa on edellisen harjoitustehtävän nojalla $-\operatorname{ord}(f, z)$, ja olemme valmiit.

———:———

6. Todista: $\Delta(z) \neq 0$, kun $z \in \mathbb{H}$.

Ratkaisu. Koska Δ on kärkimuoto painoa 12, on painokaavan mukaan oltava

$$\operatorname{ord}(\Delta, \infty) + \frac{1}{2}\operatorname{ord}(\Delta, i) + \frac{1}{3}\operatorname{ord}(\Delta, e^{\pi i/3}) + \sum_{z \in \mathcal{F} \setminus \{i, e^{\pi i/3}\}} \operatorname{ord}(\Delta, z) = \frac{12}{12} = 1,$$

missä on oltava $\operatorname{ord}(\Delta, \infty) \geqslant 1$. Mutta nyt varmasti $\operatorname{ord}(\Delta, \infty) = 1$ ja

$$\frac{1}{2}\operatorname{ord}(\Delta, i) + \frac{1}{3}\operatorname{ord}(\Delta, e^{\pi i/3}) + \sum_{z \in \mathcal{F} \setminus \{i, e^{\pi i/3}\}} \operatorname{ord}(\Delta, z) = 0,$$

mikä tarkoittaa sitä, että modulimuodon Δ ainoa nollakohta on yksinkertainen nollakohta pisteessä ∞.

———:———

7. Osoita, että funktion $G_k(z)$ q-sarja on

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)\, q^n,$$

kun $k \geqslant 4$, $q = e^{2\pi i z}$ ja $\sigma_\alpha = \sum_{d|n} d^\alpha$.

Ratkaisu. Olemme osoittaneet ensimmäisen tehtävän aluksi, että funktion $G_k(z)$ määrittelevä sarja suppenee itseisesti, ja luennoilla osoitettiin, että

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n-z)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n,$$

jokaisella $z \in \mathbb{H}$.

Nyt voimme pilkkoa funktion $G_k(z)$ määrittelevän sarjan osiin sen mukaan, onko $n = 0$ vai $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
G_k(z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{m^k} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m + nz)^k} \\
&= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m + nz)^k} \\
&= 2\zeta(k) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{k-1} q^{\ell n} \\
&= 2\zeta(k) + 2 \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{t=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(t)\, q^t.
\end{aligned}$$