JOHDATUS MODULIMUOTOIHIN JA LINNIKIN ONGELMAAN

2. LASKUHARJOITUKSET

(1) Osoita, että
$$G_k(\tau) = \sum_{m^2+n^2\neq 0; m,n\in\mathbb{Z}} (m+n\tau)^{-k}.$$
on painoa k oleva modulimuoto, kun $k \geq 4$ on parillinen kokonaisluku.

(2) Konstruoi funktioiden G_k avulla kärkimuoto (joka ei ole identtisesti nolla).

(3) Kirjoitetaan $j(g,z) = cz + d$, kun g on määritelty kuten yllä. Osoita, että
$$j(g_1g_2) = j(g_1, g_2(z))j(g_2, z)$$
ja
$$(f \mid (g_1g_2))(z) = ((f \mid g_1) \mid g_2)(z),$$
kun $g_1, g_2 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

(4) Todista: Olkoon $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ ja $z \in \mathbb{H}$. Tällöin
$$\mathrm{ord}(f,z) = \mathrm{ord}(f, M(z)),$$
kun f on modulifunktio.

(5) Todista painokaava tilanteessa, jossa perusalueen reunoilla on nollakohtia tai napoja (jotka eivät ole i, $e^{\pi i/3}$ tai $e^{2\pi i/3}$). Tarkasti ottaen tässä riittää täydentää monisteen todistus tähän tilanteeseen.

(6) Todista: $\Delta(z) \neq 0$, kun $z \in \mathbb{H}$.

(7) Osoita, että funktion $G_k(z)$ q-sarja on
$$G_k(z) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)q^n,$$
kun $k \geq 4$, $q = e^{2\pi i z}$ ja $\sigma_\alpha = \sum_{d|n} d^\alpha$.