Johdatus modulimuotoihin ja Linnikin ongelmaan

Ratkaisuehdotuksia ensimmäisiin laskuharjoituksiin

1. Olkoon f_M matriisia M vastaava Möbius-kuvaus. Todista, että:

$$f_{M_1 M_2}(z) = f_{M_1}\big(f_{M_2}(z)\big) .$$

Ratkaisu. Olkoot $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ ja $M_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, ja olkoon $z \in \mathbb{C}$. Nyt väite seuraa suoralla laskulla:

$$\begin{aligned} f_{M_1}\big(f_{M_2}(z)\big) = \frac{a\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} + b}{c\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} + d} &= \frac{a\alpha z + a\beta + b\gamma z + b\delta}{c\alpha z + c\beta + d\gamma z + d\delta} \\ &= \frac{(a\alpha + b\gamma)\, z + a\beta + b\delta}{(c\alpha + d\gamma)\, z + c\beta + d\delta} = f_{M_1 M_2}(z) . \end{aligned}$$

———:———

2. Todistettava: Olkoon $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Nyt

$$\Im f_M(z) > 0,$$

kun $\Im z > 0$.

Ratkaisu. Olkoon siis $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, ja olkoon $z \in \mathbb{H}$. Tällöin $cz + d \neq 0$, sillä jos $c \neq 0$, niin $\Im(cz + d) = c\Im z \neq 0$, ja jos $c = 0$, niin varmasti $d \neq 0$. Nyt voimme laskea

$$\Im f_M(z) = \Im \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\Im\big((az+b)\,(c\overline{z}+d)\big)}{|cz+d|^2} = \frac{(ad-bc)\,\Im z}{|cz+d|^2} = \frac{\Im z}{|cz+d|^2} > 0.$$

———:———

Ryhmässä $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ on seuraavanlaisia matriiseja:

$$k(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a(y) = \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}$$

Merkitään ensimmäistä matriisijoukkoa K:lla, toista N:llä ja viimeistä A:lla. Nyt päästään muotoilemaan Iwasawan hajotelma (johon muinoin Turussa opiskelijat viittailivat nakkina). Iwasawan hajotelma: On olemassa esitys

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = NAK,$$

eli jokainen matriisi $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ voidaan kirjoittaa yksikäsitteisesti muodossa

$$M = n(x)\, a(y)\, k(\varphi) ,$$

missä parametrit määräytyvät yhtälöstä

$$M(i) = x + yi.$$

Ryhmä K on pisteen i kiintoryhmä, eli niiden matriisien $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ joukko joille $M(i) = i$. Tämän todistus koostuu seuraavasta kahdesta harjoitustehtävästä.

3. Todista, että K on luvun i kiintoryhmä.

Ratkaisu. Olkoon $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Nyt $f_M(i) = i$ jos ja vain jos

$$\frac{ai + b}{ci + d} = i,$$

eli jos ja vain jos $a = d$ ja $b = -c$. Mutta determinanttiehdon $ad - bc = 1$ vallitessa tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$a = d = \cos\varphi \quad \text{ja} \quad -c = b = \sin\varphi$$

jollakin $\varphi \in \mathbb{R}$.

———:———

4. Totea, että jos $M(i) = x+yi$, niin $M^{-1}\, n(x)\, a(y)$ on pisteen i kiintoryhmässä K, ja todista tämän avulla Iwasawan hajotelman olemassaolo ja yksikäsitteisyys.

Ratkaisu. Koska

$$f_{n(x)} f_{a(y)}(i) = x + \frac{\sqrt{y}\, i + 0}{0 + \frac{1}{\sqrt{y}}} = x + yi,$$

on

$$f_{M^{-1} n(x) a(y)}(i) = f_{M^{-1}}(x + yi) = i,$$

eli $M^{-1}\, n(x)\, a(y) \in K$, ja on oltava

$$M^{-1}\, n(x)\, a(y) = k(\varphi)$$

jollakin $\varphi \in \mathbb{R}$, jolloin tietenkin

$$n(x)\, a(y)\, k(-\varphi) = M,$$

ja olemassaolo on todistettu.

Jos lisäksi

$$M = n(\widetilde{x})\, a(\widetilde{y})\, k(-\widetilde{\varphi})\,,$$

joillakin $\widetilde{x}, \widetilde{\varphi} \in \mathbb{R}$ ja $\widetilde{y} \in \mathbb{R}_+$, niin

$$x + yi = f_M(i) = f_{n(\widetilde{x}) a(\widetilde{y}) k(-\widetilde{\varphi})}(i) = f_{n(\widetilde{x}) a(\widetilde{y})}(i) = \widetilde{x} + \widetilde{y} i,$$

ja on oltava $x = \widetilde{x}$ ja $y = \widetilde{y}$. Lopuksi,

$$k(\varphi) = M^{-1}\, n(x)\, a(y) = M^{-1}\, n(\widetilde{x})\, a(\widetilde{y}) = k(\widetilde{\varphi})\,,$$

ja yksikäsitteisyyskin on todistettu.

———:———

5. Mitä joukosta

$$F = \left\{ z \in \mathbb{H} \,\middle|\, |z| > 1, \quad -\frac{1}{2} < \Re z < \frac{1}{2} \right\}$$

täydennettynä reunakäyrällään puolitasossa $\Re z \geqslant 0$ koostuvalle perusalueelle $\mathcal{F}$, tapahtuu, kun sitä siirretään matriisia $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ vastaavalla Möbius-kuvauksella?

Ratkaisu. Kyseistä matriisia vastaava Möbius-kuvaus on

$$f = z \longmapsto -\frac{1}{z} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H},$$

jolle pätee $f^{-1} = f$ ja joka on homeomorfismi.

Tarkastellaan ensin, mitä alueelle F tapahtuu kuvauksessa f. Joukkoon $f[F]$ kuuluvat täsmälleen ne pisteet $z = x + yi \in \mathbb{H}$, joille

$$\left| -\frac{1}{z} \right| > 1 \quad \text{ja} \quad -\frac{1}{2} < \Re\left(-\frac{1}{z} \right) < \frac{1}{2}.$$

Edellinen epäyhtälöistä sanoo tietenkin vain, että $|z| < 1$.

Jälkimmäinen epäyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$-|z|^2 < -2\Re\overline{z} < |z|^2,$$

mikä jakautuu kahdeksi eri epäyhtälöksi

$$0 < x^2 - 2x + y^2 \quad \text{ja} \quad 0 < x^2 + 2x + y^2.$$

Nämä voi edelleen kirjoittaa muodossa

$$1 < (x-1)^2 + y^2 \quad \text{ja} \quad 1 < (x+1)^2 + y^2.$$

Yllä mainittujen epäyhtälöiden nojalla joukko $f[F]$ koostuu täsmälleen niistä ylemmän puolitason pisteistä, jotka ovat origokeskisen yksikköympyrän sisällä ja ± 1-keskisten yksikköympyröiden ulkopuolella.

Lopuksi, koska f kuvaa ylemmän puolitason oikean puolikkaan $\{\Re z \geqslant 0\} \cap \mathbb{H}$ sen vasemmaksi puolikkaaksi $\{\Re z \leqslant 0\} \cap \mathbb{H}$, koostuu $f[\mathcal{F}]$ joukosta $f[F]$ varustettuna reunakäyrällään joukossa $\{\Re z \leqslant 0\} \cap \mathbb{H}$.

———:———

6. Esitettävä matriisi $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ virittäjien $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avulla.

Ratkaisu. Aloitetaan samassa hengessä kuin luentomonisteen lauseen 12 todistuksessa, eli yritetään pienentää tarkasteltavan matriisin ylärivin elementtejä ja pitää ne itseisarvoiltaan kasvavassa järjestyksessä:

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On helppo havaita, että

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Merkitään

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Näillä merkinnöillä yllä tehdyt laskut sanovat, että

$$MST^2ST^4 = ST^{-1}S^{-1},$$

ja siten

$$M = ST^{-1}S^{-1}T^{-4}S^{-1}T^{-2}S^{-1}.$$