JOHDATUS MODULIMUOTOIHIN JA LINNIKIN ONGELMAAN

1. LASKUHARJOITUKSET

(1) Olkoon f_M matriisia M vastaava Möbius-kuvaus. Todista, että

$$f_{M_1 M_2}(z) = f_{M_1}\left(f_{M_2}(z)\right).$$

(2) Todistettava: Olkoon $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Nyt

$$\Im f_M(z) > 0,$$

kun $\Im z > 0$.

Ryhmässä $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ on seuraavanlaisia matriiseja:

$$k(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a(y) = \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Merkitään ensimmäistä matriisijoukkoa K:lla, toista N:llä ja viimeistä A:lla. Nyt päästään muotoilemaan Iwasawan hajotelma (johon muinoin Turussa opiskelijat viittailivat nakkina). Iwasawan hajotelma: On olemassa esitys

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = NAK,$$

eli jokainen matriisi $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ voidaan kirjoittaa yksikäsitteisesti muodossa

$$M = n(x)a(y)k(\varphi),$$

missä parametrit määräytyvät yhtälöstä

$$M(i) = x + yi.$$

Ryhmä K on pisteen i kiintoryhmä, eli niiden matriisien $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ joukko joille $M(i) = i$. Tämän todistus koostuu seuraavasta kahdesta harjoitustehtävästä.

(3) Todista, että K on luvun i kiintoryhmä.

(4) Totea, että jos $M(i) = x + yi$, niin $M^{-1}n(x)a(y)$ on pisteen i kiintoryhmässä K, ja todista tämän avulla Iwasawan hajotelman olemassaolo ja yksikäsitteisyys.

(5) Mitä joukosta

$$F = z \in \mathbb{H} : |z| > 1, -\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2}$$

täydennettynä reunakäyrällään puolitasossa $\Re z \geq 0$ koostuvalle perusalueelle $\mathcal{F}$, tapahtuu, kun sitä siirretään matriisia $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ vastaavalla Möbius-kuvauksella?

(6) Esitettävä matriisi $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ virittäjien $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sekä $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avulla.