HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan, loppukoe ja toinen välikoe (15.5.2012)

Loppukoe koostuu kahdesta osasta, I ja II.

Ensimmäisen välikokeetta suorittaneet vastaavat pelkästään II osan kysymyksiin. Ensimmäisen välikokeen pisteitä voidaan sitten korottaa vastaamalla oikein myös I osan kysymksiin.

Seuraava tentti-uusinta on tiistaina 29.5 luokassa B120 kello 9-13.

Taskulaskinta saa käyttää, mutta siitä ei pitäisi olla paljon hyötyä.

1 Osa I : Yhden perioodin mallista

1. Tarkastellan yhden perioodin (B, S) markkinamalli jossa (B_t) on riskitön pankkitilin sijoitus ja (S_t) on osakkeen arvo, $t = 0, 1$, äärellisessä todennäköisyysavaruudessa $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

   Referenssitodennnäköisyys on P jolla $P(\{\omega_i\}) = 1/3 > 0$ kun $i = 1, 2, 3$.

   Olkoon $B_0 = S_0 = 1$, $B_1 = (1 + r)B_0$ ja $S_1(\omega) = (1 + R(\omega))S_0$, jossa osakkeen tuoton $R_1(\omega)$ mahdolliset arvot ovat $u = 8/5, d = 4/5, r = 6/5$ ja

$$R(\omega_1) = d, \quad R(\omega_2) = r, \quad R(\omega_3) = u$$

   (a) Esitä riskineutraali todennäköisyyksien juokko $Q \sim P$, numeräärin B_t:n suhteen, ja osoita että tämä (B, S)-malli on arbitraasivapaa.

   Esitä riskineutraali mittojen joukko numeräärin S_t:n suhteen.

   Onko markkinamalli täydellinen ?

   (b) Olkoon $X(\omega) = (S_1(\omega) - 1)^+$ eurooppalainen osto optio (call) lunastushinnalla $k = 1$. Laske arbitraasivapaiden hintojen joukko optiolle X. Osoita että X ei ole suojattavissa tässä (B, S)-markkinamallissa.

   (c) Laske eurooppalaisen myynti-option (put) $F(\omega) = (1 - S_1(\omega))^+$ arbitraasivapaiden hintoja (B, S) markkinamallissa.

   Vihje

$$S_1(\omega) - k = (S_1(\omega) - k)^+ - (k - S_1(\omega))^+$$

jossa $x^+ = \max\{x, 0\}$.

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ palottain lineaarinen funktio

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} (a_j x + b_j) \mathbf{1}(k_{j-1} \leq x < k_j)$$

jossa $k_0 = 0$, $k_j < k_{j+1}$, ja $k_n \leq \infty$.

Oletamme että $f(x)$ on myös jatkuva.

Yleisessä todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon käytettävissa $(S_t(\omega) : t \in [0,1])$ osakeinstrumentti ja $B_t = (1+r)^t B_0$ riskitön pankkitili, ja sen lisääksi eurooppalaiset osto-optio $(S_1(\omega) - K)^+$ ja myynti-optiot $(K - S_1(\omega))^+$, alkuhinnoilla $c^{call}(K), c^{put}(K)$ jokaisella lunastus hinnalla K, ja tämä hintasysteemi on arbitraasivapaa.

Osoita että optio $F(\omega) = f(S_1(\omega))$ on toistettavissa salkulla joka kostuu S_t, B_t instrumentteistä ja äärellisesti monesta eurooppalaisista osto ja myynti optioista.

2 Osa II :Osakemalli jatkuvassa ajassa

1. Esitä martingaalin määritelmä ja esimerkki.

2. Olkoon $(B_t, S_t : t \in \mathbb{R}^+)$ pankkitilinsijoitus ja osake Black ja Scholesin mallissa jossa on yksi osake

$$S_t = S_0 \exp\Big(\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\Big), \; B_t = B_0 \exp\big(rt\big)$$

jossa W_t on Brownin liike objekiivisen mitan P:n suhteen, $S_0, B_0 > 0$, (esimerkiksi $S_0 = B_0 = 1$).

Jatkossa filtraatio on $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}^+)$ jossa $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \in [0,t])$.

Olkoon

$$\widetilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t} = \widetilde{S}_0 \exp\Big(\sigma W_t + (\mu - r - \frac{\sigma^2}{2})t\Big),$$

diskontattu osakeprosessi.

Osoita Iton kaavan avulla Iton integraaliesityksen

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t\big(\sigma dW_t + (\mu - r)dr\big) = \widetilde{S}_t \sigma d\widehat{W}_t$$

jossa

$$\widehat{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

3. Laske kvadrattinen variaatio $[\widetilde{S}, \widetilde{S}]_t = [\widetilde{S}]_t$

4. Olkoon $Q_T \sim P_T$ ekvivalentti todennäköisyysmitta σ-algebralla $\mathcal{F}_T$, jolla on uskottavuus osamäärä

$$Z_T = \frac{dQ_T}{dP_T} = \exp\Big(-\frac{\mu - r}{\sigma} W_T - \frac{1}{2}\frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} T\Big)$$

Osoita että $\widehat{W}_T$ on Brownin liike Q-mitan suhteen.

Vihje:

Muista Bayesin kaava: kun $s < t$ ja $F(\omega) \geq 0$ on $\mathcal{F}_t$-mitallinen,

$$E_Q\Big(F\Big|\, \mathcal{F}_s\Big) = E_Q\Big(\frac{F Z_t}{Z_s}\Big| \mathcal{F}_s\Big)$$

ja osoita

$$E_Q\big(\exp(i\theta(\widehat{W}_t - \widehat{W}_s))\big|\mathcal{F}_s\big) = \exp\big(-\frac{1}{2}\theta^2(t-s)\big)$$

joka on gaussisen jakauman $\mathcal{N}(0, t-s)$ karakteristinen funktio.

5. Olkoon $f(x)$ rajoitettu funktio, ja $F(\omega) = f(S_T(\omega))$ europpalainen optio.

   Osoita että option hinta hetkellä $t \in [0, T]$ on

$$c_t(F) = \exp(-(T-t)r)E_Q\big(f(S_T)\big|\mathcal{F}_t\big) = v(S_t, t)$$

   Vihje :

$$f\big(S_T\big) = f\Bigg(S_t \exp\Bigg\{\sigma(\widehat{W}_T - \widehat{W}_t) + \big(r - \frac{\sigma^2}{2}\big)(T-t)\Bigg\}\Bigg)$$

6. On osoitettu luennolla että funktio $v(x,t)$ on sileä kun $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0,T)$. Käytä Iton kaavan osoittakseen että funktio $v(x,t)$ toteuttaa Black ja Scholesin osittaisdifferentiaaliyhtälöä:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) + \frac{\sigma^2}{2}\, x^2 \frac{\partial v^2}{\partial x}(x,t) + rx\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) - rv(x,t) = 0$$

   reunaehdolla $v(x,T) = f(x)$.

7. **Ylimääräinen kysymys :** Perustele miksi itserahoittava suojaustrategia $f(S_T)$ optiolle on

$$f(S_T) = v(S_0, 0) + \int_0^T \frac{\partial v}{\partial x}(S_u, u)dS_u + \int_0^T \left(v(S_u, u) - \frac{\partial v}{\partial x}(S_u, u)S_u\right)\frac{1}{B_u}dB_u$$