HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan, Ensimmäinen välikoe, Tehtävät ja ratkaisut (15.03.2012)

Huom. Saa käyttää taskulaskinta

Tehtävä 1

Diskreetti todennäköisyysavaruudessa $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, referenssi-todennäköisyydellä P, jolla

$$P(\{\omega_1\}) = 0.6, \quad P(\{\omega_2\}) = 0.1, \quad P(\{\omega_3\}) = 0.3,$$

olkoon osakkeiden arvot yhden periodin markkina mallissa satunnaismuuttujat $Y_t(\omega), S_t(\omega), t = 0, 1$.

Osakkeiden hinnat hetkellä $t = 0$ ovat $Y_0 = S_0 = 1$,
ja hetkellä $t = 1$ ovat satunnaisia, arvoilla

$$\begin{aligned} Y_1(\omega_1) = 1.8, \quad Y_1(\omega_2) &= Y_1(\omega_3) = 0.8, \\ S_1(\omega_1) = 0.6, \quad S_1(\omega_2) &= 1.6, \quad S_1(\omega_3) = 0.8. \end{aligned}$$

Huomataan että tässä vaiheessa, hetkellä $t = 1$ molemmat instrumentit ovat satunnaisia, eikä ole muita instrumentteja käytössä, eli deterministisen tuoton pankkitili ei ole käytössä.

1. Valitse Y_t numeräärinä. löydä kaikki ekvivalentti-riskineutraaleja todennäkösyyksiä $Q \sim P$, ja vastaa perustelemalla kysymyksiin :

   Onko markkinamalli arbitraasivapaa ?

   Onko markkinamalli täydellinen ?

   R Olkoon $\widetilde{S}_t = S_t / Y_t$ diskontattu osakearvo numeräärillä Y_t.
   Siis $\widetilde{S}_0 = 1$, ja

   $$\widetilde{S}_1(\omega_1) = 1/3, \quad , \widetilde{S}_1(\omega_2) = 2, \quad \widetilde{S}_1(\omega_3) = 1,$$

   Riskineutraalimitodennäköisyys Q Y_t:n numeräärin suhteen löytyy ratkaisemalla lineaarista systeemia

   $$\sum_{i=1}^{3} \widetilde{S}_1(\omega_i) Q(\omega_i) = \widetilde{S}_0 \Big(= S_0 \Big)$$
   $$\sum_{i=1}^{3} Q(\omega_i) = 1$$

rajoituksilla $Q(\omega_i) > 0$, (aidosti), kaikille $i = 1, 2, 3$, koska $P(\omega_i) > 0$ referenssin todennäköisyyden suhteen.

Merkinnällä $q = Q(\omega_1)$, $p = Q(\omega_2)$

$$q\frac{1}{3} + p2 + (1 - q - p) = 1$$

rajoituksilla $q, p > 0$, $(q + p) < 1$,

joten $p = q2/3$, jossa seuraa $0 < q < 3/5$.

Eli riskineutraalitodennäköisyyksien joukko on

$$\mathcal{Q} = \Big\{ Q : (\ Q(\omega_1), Q(\omega_2), Q(\omega_3)) = (q, 2/3q, (1 - 5/3)q), \quad q \in 0 < q < 3/5 \Big\}$$

$$= \Big\{ Q_\alpha := \alpha Q' + (1 - \alpha)Q'' : \ \alpha \in (0, 1) \Big\} \text{ jossa}$$

$$(\ Q'(\omega_1), Q'(\omega_2), Q'(\omega_3)) = (0, 0, 1), \quad (\ Q''(\omega_1), Q''(\omega_2), Q''(\omega_3)) = (3/5, 2/5, 0)$$

Koska on olemassa useita riskineutraaleja todennäköisyyksiä, rahoitusteorian päälauseista seuraa että markkinmalli on abitraasivapaa mutta ei täydellinen.

2. Kirjoita numeräärin vaihdon kaava ja esitä myös kaikki eqvivalenttiriskineutraali todennäköisyyksiä ja $Q \sim P$ numeräärillä S_t.
R. Merkitään $\widehat{Y}_t = Y_t/S_t$, eli osakkeen diskontattu osakearvo numeräärillä S_t.

Olkoon uskottavuusosamäärä

$$Z(\omega) = \frac{Y_0 S_1(\omega)}{S_0 Y_1(\omega)} = \frac{S_1(\omega)}{Y_1(\omega)} \text{ ja } \widehat{Q}_\alpha(\omega) = Q_\alpha(\omega) Z(\omega)$$

Saadaan

$$Z(\omega_1) = \frac{1}{3}, \quad Z(\omega_2) = 2, \quad Z(\omega_3) = 1$$

Seuraa että $\widehat{Q}_\alpha$ on riskineutraali numeräärin Y_t:n suhteen, koska

$$\frac{S_0}{Y_0} E_{\widehat{Q}_\alpha}\left(\frac{Y_1}{S_1}\right) = E_{Q_\alpha}\left(Z(\omega)\frac{Y_1 S_0}{S_1 Y_0}\right) = 1$$

Siis kaikki riskineutraali mitat numeräärin Y_t:n suhteen ovat

$$\widehat{Q}_\alpha = \alpha \widehat{Q}' + (1 - \alpha)\widehat{Q}''$$

jossa

$$\widehat{Q}'(\omega) = Z(\omega)Q', \quad \widehat{Q}''(\omega) = Z(\omega)Q''$$

eli

$$(\widehat{Q}'(\omega_1), \widehat{Q}'(\omega_2), \widehat{Q}'(\omega_3)) = (0,0,1), \quad (Q''(\omega_1), Q''(\omega_2), Q''(\omega_3)) = (1/5, 4/5, 0)$$

3. Edellisessä markkinamallissa, olkoon $X(\omega) := \mathbf{1}(\omega = \omega_1)$ digitaalioptio, joka hetkellä $t = 1$ saa arvoa 1 jos ja vain jos $\omega = \omega_1$, 0 muuten.

   Laske arbitraasivapaa hintojen joukko digitaalioptiolle $X(\omega)$.

   R. Arbitraasivapaiden hintojen joukko on avoin väli $(c^-(X), c^+(X))$ jossa

$$\begin{aligned} c^-(X) &= Y_0 \inf_{\alpha \in (0,1)} E_{Q_\alpha}\left(\frac{X}{Y_1}\right) \\ &= Y_0 \min\left\{ E_{Q'}\left(\frac{X}{Y_1}\right), E_{Q''}\left(\frac{X}{Y_1}\right) \right\} \\ &= S_0 \inf_{\alpha \in (0,1)} E_{\widehat{Q}_\alpha}\left(\frac{X}{S_1}\right) \\ &= S_0 \min\left\{ E_{\widehat{Q}'}\left(\frac{X}{S_1}\right), E_{\widehat{Q}''}\left(\frac{X}{S_1}\right) \right\} \end{aligned}$$

   voidaan laskea eri numeräärin valinnalla, lopputulos on sama:

$$c^-(X) = \min\{0, 5/9 \times 3/5\} = 0$$

   Samoin

$$\begin{aligned} c^+(X) &= Y_0 \sup_{\alpha \in (0,1)} E_{Q_\alpha}\left(\frac{X}{Y_1}\right) \\ &= Y_0 \max\left\{ E_{Q'}\left(\frac{X}{Y_1}\right), E_{Q''}\left(\frac{X}{Y_1}\right) \right\} \\ &= S_0 \sup_{\alpha \in (0,1)} E_{\widehat{Q}_\alpha}\left(\frac{X}{S_1}\right) \\ &= S_0 \max\left\{ E_{\widehat{Q}'}\left(\frac{X}{S_1}\right), E_{\widehat{Q}''}\left(\frac{X}{S_1}\right) \right\} \end{aligned}$$

   eli

$$c^+(X) = \max\{0, 1/3\} = 1/3$$

Tehtavä 2

Laajennetaan nyt ensimmäisen tehtävän osakemallia, otetaan käyttöön myös riskitön instrumentti B_t, jolla on nolla korko, eli instrumenttin hinta on $B_0 = B_1 = 1$.

1. Osoita että laajennettu markkinamalli $(B_t, S_t, Y_t : t \in \{0,1\})$ on arbitraasi vapaa ja täydellinen.

   R. Osoitan että tässä markkinamallissa jollakin (ja sitten kaikilla) numeräärin välinnällä, riskineutraalitodennäköisyys Q on yksikäsitteinen:

   Olkoon edeleen Y_t numerääri: Yksikäsitteinen $Q = Q_{\alpha^*}$ löytyy ratkaisemalla

$$\frac{B_0}{Y_0} = E_{Q_\alpha}\left(\frac{B_1}{Y_t}\right)$$
$$= \alpha E_{Q'}\left(\frac{B_1}{Y_t}\right) + (1-\alpha)E_{Q''}\left(\frac{B_1}{Y_t}\right)$$
$$\iff 1 =$$
$$\alpha\left(\frac{5}{9}Q'(\omega_1) + \frac{5}{4}Q'(\omega_2) + \frac{5}{4}Q'(\omega_3)\right) + (1-\alpha)\left(\frac{5}{9}Q''(\omega_1) + \frac{5}{4}Q''(\omega_2) + \frac{5}{4}Q''(\omega_3)\right)$$
$$\iff 1 = \alpha 5/4 + (1-\alpha)(5/9 \times 3/5 + 5/4 \times 2/5)$$
$$\iff 1 = \alpha 5/4 + (1-\alpha)5/6 \iff \alpha = 2/5$$

   Siis yksikäsitteinen riskineutraali mitta numeräärillä Y_t on

$$Q = Q_{2/5} = 2/5Q' + 3/5Q'' \quad \text{eli}$$
$$Q(\omega_1) = 9/25,\ Q(\omega_2) = 6/25,\ Q(\omega_3) = 10/25$$

   Voidaan myös laskea numerääriin vaihtokaavan avulla riski neutraali todennäköisyyttä $\check{Q}$: numeräärin B_t:n suhteen

$$\check{Q}(\omega_i) = Q(\omega_i)\frac{B_1 Y_0}{B_0 Y_1(\omega_i)} = Q(\omega_i)\frac{1}{Y_1(\omega_1)}$$
$$\check{Q}(\omega_1) = 9/25 \times 5/9 = \frac{1}{5},\ \check{Q}(\omega_2) = 6/25 \times 5/4 = \frac{3}{10},\ \check{Q}(\omega_3) = 10/25 \times 5/4 = \frac{1}{2}$$

   Tietysti $\check{Q}$ saadaan myös ratkaisemalla lineaarista systeemiä

$$\begin{cases} S_0/B_0 &= E_{\check{Q}}\big(S_1/B_1\big) = \sum_{i=1}^{3} \frac{S_1(\omega_i)}{B_1}\check{Q}(\omega_i) \\ Y_0/B_0 &= E_{\check{Q}}\big(Y_1/B_1\big) = \sum_{i=1}^{3} \frac{Y_1(\omega_i)}{B_1}\check{Q}(\omega_i) \\ 1 &= \sum_{i=1}^{3} \check{Q}(\omega_i) \end{cases}$$

rajoituksilla $\check{Q}(\omega_i) > 0$.

2. Laske hinta-ja suojaus strategia digitaalioptiolle

$$X(\omega) := \mathbf{1}(\omega = \omega_1)$$

laajennetussa markkinamallissa $(B_t, S_t, Y_t : \ t \in \{0,1\})$.

R. option X:n hinta on

$$c(X) = Y_0 E_Q\left(\frac{X}{Y_1}\right) = Y_0 \sum_{i=1}^{3} \frac{X(\omega_i)}{Y_1(\omega_i)} Q(\omega_i) =$$
$$= Y_0 \frac{1}{Y_1(\omega_1)} Q(\omega_1) = 5/9 \times 9/25 = 1/5$$

Huomataan että $c(X) = 1/5 \in (0, 1/3) = \big(c^-(X), c^+(X)\big)$, Tehtävän 1) arbitraasivapaiden hintojen joukko.

Hinnoittelu strategia löytyy ratkaisemalla lineaarista systeemiä

$$X(\omega_i) = \eta B_1(\omega_i) + \gamma S_1(\omega_i) + \xi Y_1(\omega_i), \quad i = 1,2,3$$
$$\iff \begin{cases} 1 &= \eta 1 + \gamma 3/5 + \xi 9/5 \\ 0 &= \eta 1 + \gamma 8/5 + \xi 4/5 \\ 0 &= \eta 1 + \gamma 4/5 + \xi 4/5 \end{cases}$$
$$\iff \gamma = 0, \quad \xi = 1, \quad \eta = -4/5$$

Voidaan myös tarkistaa jälkikäteen että toistavan salkun alkuarvo ja option hinta täsmäävät

$$V_0 = \gamma B_0 + \gamma S_0 + \xi Y_0 = 0 + 1 - 4/5 = 1/5 = c(X)$$

Tehtävä 3 Käsitellään markkinamalli jossa on kaksi instrumenttia, $(B_t, S_t \ : \ t \in \{0,1\})$, jossa B_t on nolla-korkoinen riskitön instrumentti $B_0 = B_1 = 1$, ja $S_1(\omega)$ on satunnaismuuttuja joka referenssi-todennäköisyyden P:n suhteen tasaisesti jakautunut välissä $[1/2, 3/2]$, eli

$$P(a < S_1 \le b) = (b - a) \quad \text{kun} \quad 1/2 \le a \le b \le 3/2$$

mutta alkuhinta S_0 ei ole vielä kiinnitetty.

Olkoon

$$F(\omega) = \mathbf{1}\big(S_1(\omega) > 1\big)$$

digitaali optio.

1. Laske satunnaisparin $(S_1(\omega), F(\omega))$ jakauman kantaja.

   R. Koska S_1: jakauman kantaja on joukko $[1/2, 3/2]$ Jakauman kantaja on joukko

   $$\text{Kantaja}\big(P_{(S_1,F)}\big) = \big\{(x, f(x)) : x \in [1/2, 3/2]\big\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

   jossa $f(x) = \mathbf{1}(x > 1)$, eli

   $$\text{Kantaja}\big(P_{(S_1,F)}\big) = \big([1/2, 1] \times \{0\}\big) \cup \big([1/2, 3/2] \times \{1\}\big)$$

2. Laske jakauman kantajan konveksipeitto.

   R. (S_1, F) jakauman konveksi peitto on suuntaissärmiö kulmapisteilla A, B, C, D, jossa

   $$A = (1/2, 0), B = (1, 0), C = (3/2, 1), D = (1, 1)$$

   Geometrisesti konveksi peitto syntyy yhdistämällä janoilla joukon pisteparit.

3. Laske tässä (B_t, S_t) markkinmallissa F option arbitraasivapaiden hintojen joukko $(c^-(F), c^+(F))$, alkuhinnan S_0 riippuen.

   Koska tässä markkinamallissa jossa on käytössä myös riskitön nolla korkoinen sijoitusinstrumentti hinta pari $(S_0, c(F))$ on arbitraasi vapaa hinta jos ja vain jos

   $$(S_0, c(F)) \in \text{ SuhteellinenSisus (Konveksipeitto (Kantaja(} P_{(S_1,F)}\text{)))}$$

   kun alkuhinta $S_0 \in (1/2, 3/2)$ on kiinnitetty, $c(F)$ on arbitraasi vapaa jos ja vain jos

   $$\begin{aligned} c(F) &\in (0, 2S_0 - 1) \text{ kun } 1/2 < S_0 \le 1 \\ c(F) &\in (2S_0 - 2, 1) \text{ kun } 1 \le S_0 < 3/2 \end{aligned}$$

   Tästä seuraa että kun $S_0 \in (1/2, 3/2)$, F option alahinta ja ylähinta ovat

   $$c^-(F) = \max\big\{2S_0 - 2,\ 0\big\}, \quad c^+(F) = \min\big\{1,\ 2S_0 - 1\big\},$$