**HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan, ratkaisut Harjoitus-5 (23.02.2012)**

1. Olkoon $X, Y \in L^2(P)$, ja olkoon
$$H := \{aY(\omega) + b : a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq L^2(P)$$
Laske projektio $\hat{X}(\omega) = (\Pi_H X)(\omega) = \hat{a}Y + \hat{b} \in H$ jossa $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}$ ovat deterministisia, jolla $\forall a, b \in \mathbb{R}$
$$E_P\big((X - \hat{a}Y - \hat{b})^2\big) \leq E_P\big((X - aY - b)^2\big) \text{ ja}$$
$$E_P(X(aY + b)) = E_P\big((\hat{a}Y + \hat{b})(aY + b)\big)$$
**R.** Minmoidaan
$$E_P\big((X - aY - b)^2\big) = E_P(X^2) - 2E_P(X(aY + b)) + a^2E(Y^2) + b^2 - 2abE_P(Y)$$
parametrien $a$ ja $b$:n suhteen. Koska osittaisderivaat saavat 0 arvoa miniimipisteessä $(a, b)$, seuraa
$$0 = \frac{\partial}{\partial a}\Big\{-2aE_P(XY) - 2bE(X) + a^2E(Y^2) + b^2 - 2abE_P(Y)\Big\}$$
$$= -2E_P(XY) + 2aE(Y^2) - 2bE_P(Y) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial b}\Big\{-2aE_P(XY) - 2bE(X) + a^2E(Y^2) + b^2 - 2abE_P(Y)\Big\}$$
$$-2E(X) + 2b - 2aE_P(Y) = 0$$
$$\iff b = aE_P(Y) - E_P(X),$$
$$-2E_P(XY) + 2aE(Y^2) - 2aE_P(Y)^2 + 2E_P(X)E_P(Y) = 0$$
$$\iff \widehat{a} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{E(Y^2) - E(Y)^2},$$
$$\widehat{b} = E_P(X) + \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{E(Y^2) - E(Y)^2}E_P(Y)$$
Tästä seuraa
$$\widehat{X} = \widehat{a}Y + \widehat{b} = E_P(X) + (Y - E_P(Y))\frac{\text{Kovarianssi}(X, Y)}{\text{Varianssi(Y)}}$$

2. Olkoon $X(\omega), Y(\omega)$ $P$-riippumattomia satunnaisvektorit, $f(x, y)$ Borel mitallinen funktio.
$$E_P(f(X, Y)|\sigma(Y))(\omega) = \int_\Omega f(X(\widetilde{\omega}), Y(\omega))P(d\widetilde{\omega})$$
$$= \int_\Omega f(X(\widetilde{\omega}), y)P(d\widetilde{\omega})\Big|_{y=Y(\omega)} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, Y(\omega))P_X(dx)$$

Jossa $P_X(B) = P(\omega : X(\omega) \in B)$, $B \subseteq \mathbb{R}^d$ on Borelin joukko.

Voit olettaa $0 \leq f(x,y) = g(x)h(x)$, jossa $g, h$ ovat mitallisia. Voidaan rakentaa sitten jonoa

$$f_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} g_{k,n}(x)h_{k,n}(y) \uparrow f(x,y) \quad \forall x, y$$

ja käyttää monotoonisen konvergenssin lauseetta.

**R.**

$$E_P(f(X)g(Y)|\sigma(Y))(\omega) = E_P(f(X)|\sigma(Y))(\omega)Y(\omega) = E_P(f(X))(\omega)Y(\omega) = E_P(f(X)g(y))\Big|_{y=Y(\omega)}$$

koska $X$ ja $Y$ ovat $P$-riippumattomia. Myös

$$E_P(f_n(X,Y)|\sigma(Y))(\omega) = \sum_{k=1}^{n} E_P(f_{k,n}(X))g_{k,n}(Y(\omega)) = E_P(f_n(X,y))\Big|_{y=Y(\omega)}$$

monotonisen konverkenssi lauseesta ehdolliselle odotusarvolle ja odotusarvolle seuraa kun $f_n(x,y) \uparrow f(x,y)$ $\forall x, y$

$$E_P(f_n(X,Y)|\sigma(Y))(\omega) \uparrow E_P(f(X,Y)|\sigma(Y))(\omega)$$

jossa vasen puoli on

$$E_P(f_n(X,y))\Big|_{y=Y(\omega)} \uparrow E_P(f(X,y))\Big|_{y=Y(\omega)}$$

koska monotonisen konvergenssin lauseesta kaikille kiinnitetyille $y \in \mathbb{R}$

$$E_P(f_n(X,y)) \uparrow E_P(f(X,y)) \qquad \square$$

3. Osoita osittaisintegroinnin kaava jonoille $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$

$$x_n y_n = x_0 y_0 + \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}\Delta y_k + \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} \Delta y_k \Delta x_k \ ,$$

jossa $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

**R.**

$$x_n y_n - x_0 y_0 = \sum_{k=1}^{n} \bigl( x_k y_k - x_{k-1} y_{k-1} \bigr)$$

jossa

$$\begin{aligned} &x_k y_k - x_{k-1} y_{k-1} = x_k (y_k - y_{k-1}) + (x_k - x_{k-1}) y_{k-1} = \\ &= x_{k-1}(y_k - y_{k-1}) + y_{k-1}(x_k - x_{k-1}) + (x_k - x_{k-1})(y_k - y_{k-1}) \end{aligned}$$

4. Osoita seuraava lemma

   Jos $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ on $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N}\}$-martingaali ja on myös $\{\mathcal{F}_t\}$-ennustettava, se on satunnaisvakio: $X_t(\omega) = X_0(\omega) \quad \forall t \in \mathbb{N}$.
   **R.**

   $$X_t = E_P(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = X_{t-1} = \dots = X_0$$

   jossa vasemman puoli seuraa koska $X_t$ on $\mathbb{F}$-ennunstettava ja oikea puoli koska $X_t$ on martingaali, ja jatketaan induktiolla.

5. Olkoon $(X_n)_{n \geq 0}$ $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$-sopiva prosessi jolla $X_n \in L^1(P)$ kaikille $n \geq 0$, ja

   $$A_n := \sum_{k=1}^{n} E_P(\Delta X_k | \mathcal{F}_{k-1}), \quad A_0 = 0$$

   (a) osoita: $A_n \in L^1$ ja se on $\{\mathcal{F}_t\}$-ennustettava.
   **R.** Koska $X_k \in L^1(P)$, kolmio -epäyhtälöstä myös $E_P(|\Delta X_k|) \leq E_P(|X_k|) + E_P(|X_{k-1}|) < \infty$.
   Koska $E_P(\Delta X_k | \mathcal{F}_{k-1})$ on $\mathcal{F}_{k-1}$-mitallinen, ja $\mathcal{F}_{k-1} \subseteq \mathcal{F}_{n-1}$ kun $k \leq n$, seuraa että $A_n$ on $\mathcal{F}_{n-1}$ mitallinen, eli $(A_n)$ on $\mathbb{F}$-ennustettava.

   (b) osoita että $M_n := (X_n - X_0 - A_n)$ on $(P, \{\mathcal{F}_n\})$-martingaali, jolla $M_0 = 0$.
   **R.** Kolmio epäyhtälöstä ja koska $(X_n)$ on $\mathbb{F}$ sopiva ja $(A_n)$ on $\mathbb{F}$-ennustettava, seuraa että $M_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_n, P)$

   $$\begin{aligned} &E_P(\Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = E_P(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - E_P(\Delta A_n \, | \mathcal{F}_{n-1}) = \\ &E_P(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - \Delta A_n = 0 \end{aligned}$$

   joka on martingaali ominaisuus.

Yhtälö

$$X_n = X_0 + A_n + M_n$$

on prosessin $(X_t)$ *Doobin* hajotelma martingaali- ja ennustettavaan osiin.

(c) Osoita että Doobin hajotelma on yksikäsitteinen: jos $(M')_n$ on toinen $(P, \{\mathcal{F}_n\})$-martingaali ja $(A'_n)$ on toinen ennustettava prosessi jolla $M'_0 = A'_0 = 0$ and

$$X_n = X_0 + A'_n + M'_n$$

seuraa $M = M'$ and $A = A'$. **Vihje**: käytä tehtävä 4).

**R.**

$$X_n - X_0 = A_n + M_n = A'_n + M'_n \Longleftrightarrow M_n - M'_n = A'_n - A_n \in \mathcal{F}_{n-1}$$

eli $(M_n - M'_n)$ on $\mathbb{F}$-martingaali (koska martingaalien summa on martingaali) joka on $\mathbb{F}$-ennustettava martingaali, josta seuraa $M_n - M'_n = M_0 - M'_0 = 0$, ja siksi myös $A'n - A_n = 0$.

(d) Osoita että $(X_n)$ kun on alimartingaali (vastaavasti. ylimartingaali ) Doobin hajotelman ennustettava osa $A_n$ on ei-vähenevä (vastaavasti ei-kasvava).

**R.** Kun $X_n$ on ylimartingaali,

$$0 \leq E(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = E(\Delta M_n + \Delta A_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0 + E(\Delta A_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \Delta A_n$$

koska $(A_n)$ on $\mathbb{F}$-ennustettava.

(e) Olkoon $(M_n)$ martingaali jolla $M_n \in L^2(P)$ for all $n \geq 0$. Osoita Jensenin epäyhtälön avulla että $(M_n^2)$ on alimartingaali.

**R.**

$$E_P(M_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) \geq \Big( E_P(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) \Big)^2 = M_{n-1}^2$$

jossa käytetiin Jensenin epäyhtälöä ehdolliselle odotusarvolle

$$E_P(f(M_n) | \mathcal{F}_{n-1}) \geq f\big(E_P(M_n | \mathcal{F}_{n-1})\big) = f(M_{n-1})$$

konveksi funktiolle $f(x) = x^2$.

(f) Osittaisintegroinnin kaavalla, kirjoita Doobin hajotelma alimartingaalille $(M_n^2)$.

**R:**

$$
\begin{aligned}
M_n^2 &= M_0^2 + 2\sum_{k=1}^{n} M_{k-1}\Delta M_k + \sum_{k=1}^{n}(\Delta M_k)^2 = \\
&M_0^2 + 2\sum_{k=1}^{n} M_{k-1}\Delta M_k + \sum_{k=1}^{n} E\Big( (\Delta M_k)^2 \Big| \mathcal{F}_{k-1}\Big) \\
&+ \sum_{k=1}^{n}\bigg\{ (\Delta M_k)^2 E\Big( (\Delta M_k)^2 \Big| \mathcal{F}_{k-1}\Big)\bigg\}
\end{aligned}
$$

Siis notaatiolla

$$
\begin{aligned}
\langle M\rangle_n &:= \sum_{k=1}^{n} E\Big( (\Delta M_k)^2 \Big| \mathcal{F}_{k-1}\Big), \\
[M]_n &:= \sum_{k=1}^{n}(\Delta M_k)^2, \quad \big(M_- \cdot M\big)_n = \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}\Delta M_k
\end{aligned}
$$

kirjoitetaan

$$
M_n^2 = M_0^2 + 2\big(M_- \cdot M\big)_n + \bigg\{ [M]_n - \langle M\rangle_n \bigg\} + \langle M\rangle_n
$$

jossa

$$
2\big(M_- \cdot M\big)_n + \bigg\{ [M]_n - \langle M\rangle_n \bigg\}
$$

on $\mathbb{F}$-martingaali ja $\langle M\rangle_n$ on $\mathbb{F}$-ennustettava.