HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan, Harjoitus-4 , Ratkaisut (16.02.2012)

1. Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$ jossa P on referenssi todennäköisyysmitta, Olkoon $V_t(\omega) \geq 0$, ja $B_t = (1+r)^t B_0 > 0, \quad t = 0, 1$ rahoitusinstrumentteja yhden perioodin arbitraasivapaassa markkinamallissa, ja $Q \sim P$ riskineutraali todennäköisyysmitta

   Oletamme että $V_1(\omega) \leq c < \infty$ $(P = 1)$, siis V_1 on rajoitettu satunnaismuuttuja.

   Olkoon $R_1(V) := (V_1 - V_0)/V_0$

   V:n instrumenttin tuotto (engl. return)

   i) Osoita $E_Q(R_1(V)) = r$ jossa r on riksittömän instrumentin tuotto.

   R.

   $$E_Q(R_1(V)) = \frac{1+r}{V_0} E_Q\left(\frac{V_1}{1+r}\right) - 1 = \frac{1+r}{V_0} V_0 - 1 = r$$

   ii) Olkoon $P \sim Q$ todennäköisyysmitta joka ei ole välttämättä riskineutraali. Osoita

   $$E_P(R_1(V)) = r - \text{Kovarianssi}_P\left(\frac{dQ}{dP}\ ,\ R_1(V)\right)$$

   R. Merkitään $Z := dP/dQ > 0$ (aidosti Q ja P todennäköisyydellä 1, koska $P \sim Q$. Koska $E_P(X) = E_Q(XZ)$, kun $X \equiv 1$ seuraa $E_Q(Z) = 1$.

   $$\begin{aligned}&E_P(R_1(V)) = E_Q(ZR_1(V)) = E_Q((Z-1)R_1(V)) + E_Q(R_1(V))\\ &= r + E_Q(ZR_1(V)) - E_Q(Z)E_Q(R_1(V)) = r + \text{Kovarianssi}_Q(dP/dQ, R_1(V))\end{aligned}$$

   (joka on nyt eri kaava kun se mitä piti saada!) Olkoon $Z^{-1} = dQ/dP > 0$ (aidost P ja Q todennäköisyydellä 1). Koska $E_P(Z^{-1}) = 1$,

   $$\begin{aligned}&r = E_Q(R_1(V)) = E_P((Z^{-1}-1)R_1(V)) + E_P(R_1(V)) =\\ &E_P(R_1(V)) + E_P(Z^{-1}R_1(V)) - E_P(Z^{-1})E_P(R_1(V))\\ &= E_P(R_1(V)) + \ \text{Kovarianssi}(dQ/dP, R_1(V))\end{aligned}$$

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ palottain lineaarinen funktio

   $$f(x) = \sum_{j=1}^{n} (a_j x + b_j)\mathbf{1}(k_{j-1} \leq x < k_j) \tag{0.1}$$

jossa $k_0 = 0$, $k_j < k_{j+1}$, ja $k_n = \infty$.

Yleisessä todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon käytettävissa $(S_t(\omega) : t \in [0,1])$ osakeinstrumentti ja $B_t = (1+r)^t B_0$ riskitön pankkitili, ja sen lisääksi eurooppalaiset osto-optio $(S_1(\omega) - K)^+$ ja myynti-optiot $(K - S_1(\omega))^+$, alkuhinnoilla $c^{call}(K), c^{put}(K)$ jokaisella lunastus hinnalla K, ja tämä hintasysteemi on arbitraasivapaa.

Osoita että optio $F(\omega) = f(S_1(\omega))$ on toistettavissa salkulla joka kostuu S_t, B_t instrumentteistä ja äärellisesti monesta eurooppalaisista osto ja myynti optioista.

R. Huomataan että osto myynti pariteetista eurooppalainen myynti optio

$$(k - S_1)^+ = (S_1 - k)^+ k - S_1$$

on suojattavissa salkulla

$$\eta B_t + \xi S_t + \psi (S_t - k)^+$$

painoilla $\eta = k/(1+r)$, $\xi = -1$ ja $\psi = 1$.

Siis voidaan yhtä hyvin käsitellä salkkuja joka koostuvat pelkästään instrumentteista $(B_t, S_t, (S_t - k)^+ : k \geq 0)$.

Olkoon $f(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ paloittain lineaarinen ja oikealta jatkuva kuuten kaavassa 0.1. Kun $x \geq 0$ voidaan kirjoittaa

$$f(x) = f^c(x) + \sum_{y \leq x} (f(y) - f(y-)) = f^c(x) + \sum_{i > 0} \mathbf{1}(x \geq k_i) \Delta f(k_i)$$

jossa $f^c(x)$ on jatkuva. Voidaan laskea erikseen suojausstrategiat optiolle $f^c(S_1(\omega))$ ja digitaaliselle optiolle $\mathbf{1}(S_1(\omega) \leq k)$.

Merkitään $f(x) = f^c(x)$, jatkuva funktio esityksellä 0.1. Jatkuvuus ehto tarkoittaa

$$b_{i+1} + a_{i+1} k_i = a_i + b_i k_i, \quad \forall i$$

Nähdään että kun f on jatkuva ja palottain lineaarinen

$$f(x) = b_1 + a_1 x + (a_2 - a_1)(x - k_1)^+ (a_3 - a_2)(x - k_2)^+ + \cdots =$$
$$b_1 + a_1 x + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)(x - k_i)^+$$

josta seuraa

$$f(S_1) = b_1 + a_1 S_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)(S_1 - k_i)^+$$

eli voidaan suojata $f(S_1)$ optiota salkkulla jossa B_t:n instrumenttin paino on $\frac{b_1}{1+r}$, osakkeen paino on a_1, ja osto-optioiden $(S_1 - k_i)^+$ painot ovat $(a_{i+1} - a_i)$, $i = 1, \dots, n-1$.

Jos funktio $f(x)$ on epäjatkuva, joudutaan suojata myös funktion hypyt. Tämä onnistuisi digitaali optiolla $\mathbf{1}(S_1 \geq k)$.

Digitaali optio voidaan approksimoida eurooppalaisten osto-optioiden avulla. Olkoon $f(x) = \mathbf{1}(x \geq k)$, jollakin $k > 0$. Määritellään

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x \leq k - 1/n \\ k - 1/n + (x - k + 1/n)n & k - 1/n < x \leq k \\ 1 & x > k \end{cases}$$

joka on paloittain lineaarinen ja jatkuva, jolla $f_n(x) \to f(x) = \mathbf{1}(x \geq k)$ $\forall x$ kun $n \to \infty$.

$f_n(x)$ funktiolla on esitys

$$f_n(x) = n\big[(x - k + n^{-1})^+ - (x - k)^+\big]$$

Tästä seuraa että eurooppalaisten osto-optioiden salkku

$$n(S_1(\omega) - (k - n^{-1}))^+ - n(S_1(\omega) - k)^+ \to \mathbf{1}(S_1(\omega) \geq k) \quad \forall \omega \quad \text{kun } n \to \infty$$

eli digitaalisen option hinnalle pätee

$$c(f(S_1)) = \lim_n c(f_n(S_1)) = n\big(c(k - 1/n) - c(k)\big) = -\frac{d}{dk} c(k)$$

jossa $c(k)$ on eurooppalaisen osto option $(S_1 - k)^+$ hinta.

Rahoitusmarkinoilla toimitaan oikeasti juuri näin, eurooppalaisista osto-optioista käydän kauppaa (arbitraasivapaalla) markkinahinnoilla, ja niiden avulla voidaan toistaa monimutkaisempia optiot jotka eivät olisi suoraan kaupattavissa.

3. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon satunnaismuuttuja $U(\omega)$ tasaisesti jakautunut välissä $[0, 1]$. Siis

$$P(\{\omega : a < U(\omega) \leq b\}) = (b - a) \text{ kun } 0 \leq a \leq b \leq 1 \,.$$

Yhden perioodin markkinamallissa on kaksi instrumenttia:

Riskitön pankkitili $B_t = (1+r)^t B_0$ jolla $B_0 = 1$, $r = 1/5$, ja osake S_t jolla

$$S_0(\omega) = 1 \text{ kun } t = 0 \text{ ja } S_1(\omega) = \big(1/2 + U(\omega)\big) \text{ kun } t = 1.$$

(a) Osoita että markkinamalli on arbitraasivapaa mutta ei ole täydellinen, esittamällä kahta erilaista riskineutraalimittaa.

Vihjeet: Yksi tapa (joka tietysti ei ole aino tapa) jolla voi saada riskineutraalimitan on seuraava:
Olkoon $V(\omega)$ ~Tasainen(a,b) jossa $0 \leq a < b \leq 1$, siis kun $a \leq r \leq u \leq b$

$$P(r < V \leq u) = (u-r)/(b-a)$$

ja $I(\omega) \in \{0,1\}$ binäärisatunnaismuuttuja. Oletamme että I, V, U ovat riippumattomia P-mitan suhteen,

$$P(I=1) = 1 - P(I=0) = \varepsilon \in [0,1)$$

ja sitten määrittelemme

$$\widehat{U}(\omega) = I(\omega)V(\omega) + (1 - I(\omega))U(\omega)$$

Osoita ensi että $\hat{U}$:n jakauma on equivalentti U:n jakauman kanssa, siis

$$P(\widehat{U} \in A) = 0 \Longleftrightarrow P(U \in A) = 0$$

Laske ensi $E_P(\widehat{U})$, parametrien ε, a, b funktiona ja esitä parametriarvot jolla P tule olemaan riskineutraali markkinamallissa $(B, \widehat{S})$ jossa

$$\widehat{S}_0(\omega) = S_0(\omega) \text{ kun } t = 0 \text{ ja}$$
$$\widehat{S}_1(\omega) = \big(1/2 + \widehat{U}(\omega)\big) = \big(1/2 + I(\omega)V(\omega) + (1-I(\omega))U(\omega)\big) \text{ kun } t = 1\ .$$

R. II rahoitusteorian päälauseesta seuraa suoraan että markkinamalli on epätäydellinen, koska $\dim\big(L^0(\Omega, \sigma(S_1), P)\big) = +\infty$.
Kun $\varepsilon \in (0,1)$, $0 \leq a \leq b \leq 1$

$$P(\widehat{U} \in A) = P(\{\ I=1\} \cap \{V \in A\}) + P(\{I=0\} \cap \{U \in A\})$$
$$= P(\{\ I=1\})P(\{V \in A\}) + P(\{I=0\})P(\{U \in A\}) =$$
$$\varepsilon P(V \in A) + (1-\varepsilon)P(U \in A) = \varepsilon \frac{|A|}{b-a} + (1 - \varepsilon|A|)$$

jossa $P(U \in A) = |A|$ on Lebesguen mitta (eli välin pituus kun A on väli), eli $\widehat{U}$ ja U:n jakaumat ovat ekvivalentteja.

$$
\begin{aligned}
&E_{\varepsilon a,b}\left(\frac{\widehat{S}_1}{B_1}\right) = \frac{5}{6}E_\varepsilon\Big(1/2 + I(\omega)V(\omega) + (1 - I(\omega))U(\omega)\Big)\\
&= \frac{5}{12} + \varepsilon E(a + (b-a)U) + (1-\varepsilon)E(U)\\
&= \frac{5}{12} + \varepsilon a + (b - a + 1 - \varepsilon)E(U) = \frac{11}{12} + \varepsilon(a - 1/2) + (b-a)/2
\end{aligned}
$$

jossa

$$
E(U) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}
$$

Siis todennäköisyysmitta $Q_{\varepsilon,a,b} \sim P$ on riskineutraali jos ja vain jos

$$
\begin{aligned}
&1 = \frac{S_0}{B_0} = E_{\varepsilon,a,b}\left(\frac{\widehat{S}_1}{B_1}\right)\\
&\frac{1}{1}2 = \varepsilon(a - 1/2) + (b-a)/2\\
&\iff b = a + \frac{1}{6} + \varepsilon(1 - 2a)
\end{aligned}
$$

rajoituksilla $0 < a < b < 1$, $\varepsilon \in (0,1)$. Koska on kaksi vapaa parametria nähdään että on olemassa useita riskineutraali mittoja, esimerkiksi kun $a = 0$, $1/6 < b < 1$ jokainen

$$
\varepsilon = b - 1/6
$$

vastaa riksineutraalimittaa.

(b) Laske europpalaisen osto-option $F(\omega) = \big(S_1(\omega) - 1\big)^+$ arbitraasivapaahintojen joukko $\mathcal{C}(F)$.

R. Lasketaan diskontatun vektorin jakauman kantajoukko:

$$
\begin{aligned}
&Y(\omega) = \left(\frac{S_1(\omega)}{B_1}, \left(\frac{S_1(\omega)}{B_1} - \frac{1}{B_1}\right)^+\right)\\
&= \left(\frac{5}{12} + \frac{5}{6}U(\omega), \left(u - \frac{5}{12}\right)^+\right),\\
&\operatorname{supp}(P_Y) = \left\{\left(\ \frac{5}{12} + u, \left(u - \frac{5}{12}\right)^+\right)\ :\ 0 \le u \le 5/6\right\}\\
&\text{riConvexHullsupp}(P_Y) = \overset{\triangle}{ABC}
\end{aligned}
$$

jossa $\overset{\triangle}{ABC}$ on avoin kolmio kulmapisteilla $A = (5/12, 0), B = (5/6, 0), C = (15/6, 5/12)$. Koska osakkeen diskontattu alkuhinta on $S_0/B_0 = 1$, seuraa että option arbitraasivapaa hinta on joukon

$$\overset{\triangle}{ABC} \cap \big(\{\ 1\} \times \mathbb{R}_+\big)$$

projektio y:n akseliin, eli avoin väli $\big(1/6, 7/24\big)$.

(c) Tässä (B_t, S_t) mallissa, millä optioilla on yksikäsitteinen arbitraasivapaa hinta ? Mitkä optiot ovat toistettavissa ?

Epätäydellisessä yhden periodin malli vain optiot jotka riippuvat linearisesti instrumenteista ovat suojattavissa, eli

$$F(\omega) = \eta B_1 + \xi S_1(\omega)$$

yksikäsitteisella abitraasivapaa hinnalla $c(F) = \eta B_0 + \xi S_0$.

Vihje: tutki diskontatun option ja diskontatun osakkeen yhteisjakauman kantajoukon (joka riippuu vain referenssitodennäköosyysmitan P:n nolla joukoista) conveksipeiton suhteellinen sisus.

Käytännossä etsi pienin joukko joka sisältää todennäköisyydellä $P = 1$ pari $(\widetilde{S}_1(\omega), \widetilde{F}(\omega)) \in \mathbb{R}^2$, ja piirra joukon konveksipeitto.

4. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus ja $\varepsilon_1(\omega), \varepsilon_2(\omega)$ P:n suhteen stokastisesti riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujat jolla

$$P(\varepsilon_i = 1) = 1 - P(\varepsilon_i = 0) = 1/2$$

Kasitellään (B_t, S_t, X_t) markkinamalli jossa riskitön instrumentti on $B_t = (1 + r)B_0 > 0$, jossa $r > -1$, $t \in 0, 1$, $B_0 = 1$, $S_t(\omega)$, $X_t(\omega)$ $t = 0, 1$ ovat osakeinstrumentteja jossa $S_0 = X_0 = 1$

$$\begin{aligned} S_1(\omega) &= (1 + d + (u - d)\varepsilon_1(\omega))(1 + d + (u - d)\varepsilon_2(\omega)) \\ X_1(\omega) &= (1 + u + (d - u)\varepsilon_1(\omega))(1 + u + (d - u)\varepsilon_2(\omega)) \end{aligned}$$

jossa $-1 < d < r < u$, esimerkiksi $d = -1/5$, $r = 1/5$, $u = 2/5$.

(a) Onko malli (B_1, S_1, X_1) alkuhinnoilla (B_0, S_0, X_0) arbitraasivapaa ?

(b) Onko malli täydellinen ?

Vihje Vaikka Ω on abstrakti todennäköisyysavaruus, voidaanko kuvata tätä mallia äärellisessä todennäköisyysavaruudessa ja monta tilaa siihen tarvitaan ?

R. Olkoon $\Omega = \{\,0,1\}^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ jossa $\varepsilon_k((i,j)) = i$ kun $k=1,2$, $i,j\in\{0,1\}$,

Huomataan että

$$\big(S(\omega),X(\omega)\big) = \begin{cases} \big((1+d)^2,(1+u)^2\big) & \text{kun } \omega=(0,0)\\ \big((1+d)(1+u),(1+d)(1+u)\big) & \text{kun } \omega=(0,1) \text{ vai} \omega=(1,0)\\ \big((1+u)^2,(1+d)^2\big) & \text{kun } \omega=(1,1)\end{cases}$$

josta seuraa että satunnaisvektori $(S(\omega),X(\omega))$ virittää σ-algebran

$$\sigma(S,X)=\sigma\big(\{\,(0,0)\},\{\,(1,1)\},\{\,(0,1),(1,0)\}\,\big)$$

jolla on 3 atoomeja. Tästä seuraa että $\dim(L^0(\Omega,\sigma(S,X),P))=3$. Toisaalta diskontatut instrumentit $\widetilde{X}_t = X_t/B_t$ ja $\widetilde{S}_t = S_t/B_t$ ovat lineaarisesti riippumattomia, eli lineaarisella systeemilla

$$\begin{cases} q_1\widetilde{S}_1(0,0) &+& q_2\widetilde{S}_1(0,1) &+& q_3\widetilde{S}_1(1,1) &=& \widetilde{S}_0\\ q_1\widetilde{X}_1(0,0) &+& q_2\widetilde{X}_1(0,1) &+& q_3\widetilde{X}_1(1,1) &=& \widetilde{X}_0\\ q_1 &+& q_2 &+& q_3 &=& 1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} q_1\frac{49}{30} &+& q_2\frac{28}{30} &+& q_3\frac{16}{30} &=& 1\\ q_1\frac{16}{30} &+& q_2\frac{28}{30} &+& q_3\frac{49}{30} &=& 1\\ q_1 &+& q_2 &+& q_3 &=& 1\end{cases}$$

tuntemattomilla

$$q_1 = Q(\{(0,0)\}), q_2 = Q(\{(0,1),(1,0)\}), q_3 = Q(\{1,1\}), \text{ jossa}$$
$$\widetilde{S}_1(0,1)=\widetilde{S}_1(1,0),\ \widetilde{X}_1(0,1)=\widetilde{X}_1(1,0)\ .$$

on yksikäsitteinen ratkaisu. Malli on arbitraasi vapaa ja täydellinen jos ja vain jos tämä yksikäsitteinen ratkaisu on aidosti positiivinen, joka pitää paikansa koska systeemin ratkaisu on $Q = (q_1,q_2,q_3) = (0.2222, 0.5556, 0.2222) > 0$.

(c) Laske arbitraasivapaiden hintojen joukko swap optiolle $F(\omega) = \big(S_1(\omega)-X_1(\omega)\big)^+$. Koska malli on täydellinen, jokainen optio on suojattavissa ja sillä on yksikäsitteinen hinta. Erityisesti

$$c(F) = B_0E_Q\left(\frac{(S_1-X_1)^+}{B_1}\right) =$$
$$\frac{5}{6}\left(q_1\frac{7^2-4^2}{5^2}+q_20+q_30\right) = q_1\frac{49-16}{30} = 0.2444$$

Lasketaan option suojaustrategia:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{F}(\omega) = \frac{F(\omega)}{B_1} = \eta + \xi \widetilde{S}_1(\omega) + \psi \widetilde{X}_1(\omega), \quad \forall \omega \\
&\Longleftrightarrow \frac{(7^2 - 4^2)}{30} = \eta + \xi \frac{7^2}{30} + \psi \frac{4^2}{30} \\
&0 = \eta + \xi \frac{4^2}{30} + \psi \frac{7^2}{30} \\
&0 = \eta + \xi \frac{7 \times 4}{30} + \psi \frac{7 \times 4}{30}
\end{aligned}$$

with solution $\eta = -3.4222$, $\xi = 2.3333$ $\psi = 1.3333$, jossa

$$\eta B_0 + \xi S_0 + \psi X_0 = \eta + \xi + \psi = c(F) = 0.2444$$

Huomautus Täydellisuus koskee kaikkea $\sigma(X, S)$-mitallisia optioita $F(\omega)$. Kun optio $F(\omega)$ on $\mathcal{F}$-mitallinen mutta ei $\sigma(X, S)$-mitallinen, ei ole myöskään suojattavissa, koska kaikki satunnaismuuttujat jolla on esitys

$$F(\omega) = \eta B_1 + \xi S_1(\omega) + \psi X_1(\omega)$$

ovat $\sigma(X, S)$-mitallisia.