HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan, Harjoitus-2 (02.02.2012)

Olkoon $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ todennäköisyysavaruus jossa $P(\omega_i) = 1/3, \quad i = 1, 2, 3,$

ja olkoon $(S_t(\omega), U_t(\omega), B_t : t = 0, 1)$ rahoitusinstrumentteja (t on aikaparametri).

jossa $B_0 = 1$, $B_1 = (1+r) = 9/8$, on riskitön instrumentti korolla $r = 1/8$.

Kun $t = 1$, olkoon

$$\begin{aligned} &S_1(\omega_1) = 1, \quad S_1(\omega_2) = 3/2, \quad S_1(\omega_3) = 1/2 \\ &U_1(\omega_1) = 0, \quad U_1(\omega_2) = 1/2, \quad U_1(\omega) = 1 \end{aligned}$$

mutta emme ole vielä kiinnittäneet alkuhintoja (S_0, U_0) hetkellä $t = 0$.

1. Esitä arbitraasi-vapaiden hintapareja parille (S, U) alkuhetkellä $t = 0$, ja vastaavien hinnoittelutodennäköisyyksien joukko silloin kun valitaan numerääriksi B_t.

   Ratkaisu Diskontatut osakehinnat $\widetilde{S}_1(\omega) := S_1(\omega)/B_1(\omega)$, $\widetilde{U}_1(\omega) := U_1(\omega)/B_1(\omega)$, hetkellä $t = 1$ ovat

$$\begin{aligned} &\widetilde{S}_1(\omega_1) = 8/9, \quad \widetilde{S}_1(\omega_2) = 4/3, \quad \widetilde{S}_1(\omega_3) = 4/9 \\ &\widetilde{U}_1(\omega_1) = 0, \quad \widetilde{U}_1(\omega_2) = 4/9, \quad \widetilde{U}_1(\omega) = 8/9 \end{aligned}$$

   Arbitraasivapaa hintapareja ovat

$$\mathcal{C} = \Big\{ \big(c_Q(S), c_Q(U)\big) : \quad Q(\omega_i) > 0, i = 1, 2, 3, \sum_{i=1}^{3} Q(\omega_i) = 1 \Big\} \text{ jossa}$$
$$c_Q(S) = B_0 E_Q\big(\widetilde{S}_1\big), \quad c_Q(U) = B_0 E_Q\big(\widetilde{U}_1\big)$$

$$\begin{aligned} (c_Q(S), c_Q(U)) \quad &= \quad (4/9 + 4/9q_1 + 8/9q_2, 8/9 - 8/9q_1 - 4/9q_2) \\ \iff \begin{pmatrix} C_Q(S) \\ C_Q(U) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4/9 \\ 8/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/9 & 8/9 \\ -8/9 & -4/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} : \quad q_1, q_2 > 0, q_1 + q_2 < 1 \end{aligned}$$

   Arbitraasi vapaiden hintaparien $(c(S), c(U))$ joukko on avoin kolmio $\overset{\triangle}{ABC}$ jossa $A = (8/9, 0)$, $B = (12/9, 4/9)$, $C = (4/9, 8/9)$.

2. Esitä vastaavat riskineutraali todennäköisyyksien joukko silloin kun valitaan numerääriksi S_t.

R. Diskontatut instrumentit ovat

$$\widehat{B}_t = \frac{B_t}{S_t}, \quad \widehat{U}_t = \frac{U_t}{S_t},$$

mahdolliset arvot hetkellä $t = 1$ ovat

$$\begin{aligned} &\widehat{B}_1(\omega_1) = 9/8, \quad \widehat{B}_1(\omega_2) = 3/4, \quad \widehat{B}_1(\omega_3) = 9/4 \\ &\widehat{U}_1(\omega_1) = 0, \quad \widehat{U}_1(\omega_2) = 1/3, \quad \widehat{U}_1(\omega) = 2 \end{aligned}$$

Mitta Q on riskineutraali numeräärin S_t:n suhteen jos ja vain jos $Q \sim P$, (eli $Q(\omega_i) > 0 \ \forall i$) ja

$$E_Q\left(\frac{B_1}{S_1}\right) = \frac{B_0}{S_0}, \quad E_Q\left(\frac{U_1}{S_1}\right) = \frac{U_0}{S_0},$$

Tässä vaiheessa, vaikka B_t instrumentin alkuhinta B_0 on kiinnitetty, jos emme kinnitä kumpakaan alkuhintaa S_0 tai U_0, ei voi vielä puhua riksineutraalitodennäköisyysmitoista. Arbitraasivapaiden hintaparien (U_0, S_0) joukko ei riipu numeräärin valinnasta.

Jatkaamme valitsemalla mielivaltaisesti arbitraasivapaiden hintojen joukosta (eli kolmion $\overset{\triangle}{ABC}$ sisukesta) hintaparia ($S_0 = c(S) = 8/9, U_0 = c(U) = 4/9$), ja alkuhinta $B_0 = 1$ oli jo kiinnitetty.

Kun valitaan ensin B_t:n numerääriksi ja instrumentit (B_t, S_t, U_t) ovat käytettävissä riskineutraalimittojen joukko löytyy ratkaisemalla yhtälöä

$$\begin{aligned} &E_Q(\widetilde{U}_1) = \widetilde{U}_0 = 4/9, \quad E_Q(\widetilde{S}_1) = \widetilde{S}_0 = 8/9 \\ &\iff q_2\, 4/9 + q_3\, 8/9 = 4/9, \qquad (1 - q_2 + q_3) 8/9 + q_2 4/3 + q_3\, 4/9 = 8/9 \end{aligned}$$

rajoituksilla $q_2, q_3 > 0$, $q_2 + q_3 < 1$, jolla on yksikäsitteinen ratkaisu $Q = (q_1 = 1/3, q_2 = 1/3, q_3 = 1/3)$.

Huomataan että jos instrumentti B_t ei olisi ollut käytössä, hintasysteemilla $(S_1(\omega), U_1(\omega); S_0 = 8/9, U_0 = 4/9)$ olisi ollut useita riskineutraalimittoja, koska numräärin S_t:n suhteen saadaan yhtälöä

$$\begin{aligned} &E_Q(\widehat{U}_1) = E_Q\big(U_1/S_1\big) = \widehat{U}_0 = U_0/S_0 = 1/2, \\ &\iff q_2\, 1/3 + q_3\, 2 = 1/2, \end{aligned}$$

rajoituksilla $q_2, q_3 > 0$, $q_2 + q_3 < 1$, jolla on useita ratkaisuja

$$q_1(\alpha) = (5\alpha - 1/2), \quad q_2(\alpha) = 3/2 - 6\alpha, \quad q_3(\alpha) = \alpha$$

rajoituksilla $0 \le q_i(\alpha) \le 1$ $i = 1, \ldots, 3$

$$\max\left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{12}, 0\right\} \le \alpha \le \min\left\{\frac{3}{10}, \frac{1}{4}, 1\right\}$$
$$\iff \alpha \in \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{4}\right)$$

siis silloin kun vaan instrumentit (S_t, U_t) ovat käytössä alkuhinnoilla S_0, U_0 riskineutraali mittojen joukko

$$\mathcal{Q} = \left\{Q_\alpha = (5\alpha - 1/2,\ 3/2 - 6\alpha,\ \alpha) : \quad \frac{1}{10} < \alpha < \frac{1}{4}\right\}$$
$$= \left\{\left(0, \frac{9}{10}, \frac{1}{10}\right)\alpha + \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)(1 - \alpha) : \quad \alpha \in (0, 1)\right\}$$

joka ei ole yksikäsitteinen. Tämä on sopusoinnissa rahoitusteorian II päälauseen kanssa: markkinamalli $(B_1, S_1, U_1; B_0, S_0, U_0)$ on täydellinen (kaikki optiot ovat suojattavissa), mutta kun instrumentti B_t ei ole käytössä, malli $(S_1, U_1; S_0, U_0)$ ei ole enää täydellinen.

3. Saako U_t olla numerääri ? **R.** U_t ei saa olla numerääri koska referenssi todennäköisyyden suhteen $P(U_1 = 0) > 0$.

4. Kirjoita numeräärin vaihdon vastaava hinnoittelutodennäköisyyksien välinen uskottavuus osamäärä. **R.** Markkinamallissa $(B_t, S_t, U_t : t = 0, 1)$, jos Q on riskineutraalimitta numeräärin B_t:n suhteen,

$$\widehat{Q}(\omega) = \frac{S_1(\omega)B_0(\omega)}{B_1(\omega)S_0(\omega)}Q(\omega)$$

on riskineutraali numeräärin S_t:n suhteen, koska

$$E_{\widehat{Q}}\left(\frac{U_1}{S_1}\right) = \frac{U_0}{S_0}, \quad E_{\widehat{Q}}\left(\frac{B_1}{S_1}\right) = \frac{B_0}{S_0}, \iff E_Q\left(\frac{S_1(\omega)B_0(\omega)}{B_1(\omega)S_0(\omega)}\frac{U_1}{S_1}\right) = \frac{U_0}{S_0}, \quad E_{\widehat{Q}}\left(\frac{S_1(\omega)B_0(\omega)}{B_1(\omega)S_0(\omega)}\frac{B_1}{S_1}\right) = \frac{B_0}{S_0},$$

eli

$$\widehat{Q}(\omega_1) = \frac{1}{3}1,\ \widehat{Q}(\omega_2) = \frac{1}{3}3/2,\ \widehat{Q}(\omega_3) = \frac{1}{3}1/2$$

jossa voidaan tarkistaa varmuuden vuoksi että

$$\sum_{i=1}^{3} \widehat{Q}(\omega_i) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$$

5. Riippuko arbitraasi-vapaiden hintaparien (S, U) joukko numeräärin valinnasta ?

   R. Yleisesti arbitraasivapaiden hintasysteemien joukko ei riipu numeräärin valinnasta.

6. Laske arbitraasi-vapaiden hintojen joukko hetkellä $t = 0$ kolmikolle (S, U, F) jossa $F = (S_1 - U_1)^+$ on swap- (vaihto) optio. Merkintä: $x^+ = \max(x, 0)$

   R. Siinä vaiheessa B_t on aino instrumentti jolla on kiinnitetty hinta hetkellä 0, kaikki hintakolmikot

$$(S_0, U_0, F_0) = \left(E_Q(S_1)\frac{B_0}{B_1}, E_Q(U_1)\frac{B_0}{B_1}, E_Q((S_1 - U_1)^+)\frac{B_0}{B_1} \right)$$

jossa $Q \sim P$ on todennäköisyysmitta ovat arbitraasivapaita, eli

$$\begin{aligned}(S_0, U_0, F_0) &= \left(E_Q(S_1)\frac{B_0}{B_1}, E_Q(U_1)\frac{B_0}{B_1}, E_Q((S_1 - U_1)^+)\frac{B_0}{B_1} \right) \\ &= q_1\Big(8/9, 0, 8/9) + q_2(4/3, 4/9, 8/9) + (1 - q_1 - q_2)(4/9, 8/9, 0)0 \\ &= (4/9, 8/9, 0) + q_1(4/9, -8/9, 8/9) + q_2(8/9, -4/9, 8/9)\end{aligned}$$

rajoituksilla $q_1, q_2 > 0$, $q_1 + q_2 < 1$.

Kun alkuhinnat kiinnitään hetkellä $t = 0$ valinnalla $(B_0 = 1, S_0 = c(S) = 8/9, U_0 = c(U) = 4/9)$, koska malli on täydellinen kaikki optiot ovat suojattavissa. Erityisesti option $F = (S_1 - U_1)^+$ yksikäsitteinen arbitraasi vapaa hinta on

$$c(F) = B_0 E_Q\left(\frac{F}{B_1}\right) = \frac{B_0}{B_1} E_Q\big((S_1 - U_1)^+\big)$$

jossa Q on yksikäsitteinen arbitraasivapaa todennäköisyys numeräärillä B_t, siis

$$c(F) = \frac{8}{9}\frac{1}{3}(1 + 1 + 0) = \frac{16}{27}$$

Huomataan että hinta ei riipu numeräärin valinnasta: jos $\widehat{Q}$ on riskineutraali S_t:n numeräärin suhteen, on myös

$$
\begin{aligned}
&c(F) = S_0 E_{\widehat{Q}}\left(\frac{F}{S_1}\right) = \\
&8/9\left\{1/3\left(1-\frac{U_1(\omega_1)}{S_1(\omega_1)}\right)^+ + 1/2\left(1-\frac{U_1(\omega_2)}{S_1(\omega_2)}\right)^+ 1/6\left(1-\frac{U_1(\omega_3)}{S_1(\omega_3)}\right)^+\right\} \\
&= 8/9\left(\frac{1}{3}1+\frac{1}{2}2/3+\frac{1}{6}0\right) = \frac{16}{27}
\end{aligned}
$$

Kun option arbitraasivapaa hinta on yksikäsitteinen, optio on suojattavissa. Tässä tapauksessa suojaus strategia löytyy ratkaisemalla yhtälösysteemiä salkulle (η, ξ, ψ)

$$
F(\omega) = V_1(\omega) = \eta B_1 + \xi S_1(\omega) + \psi U_1(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega
$$

joka koostuu kolmesta lineaarisesti riippumattomasta yhtälöstä, 3 tuntemattomalla. Sen lisääksi tiedetään jo option hinta

$$
c(F) = V_0 = \eta B_0 + \xi S_0 + \psi U_0
$$

mutta tämä ylimääräinen yhtälö riippuu lineaarisesti edellisistä koska

$$
\begin{aligned}
c(F) &= \frac{B_0}{B_1} E_Q(F) = \frac{B_0}{B_1}\sum_{\omega\in\Omega} Q(\omega)F(\omega) \\
&= \frac{B_0}{B_1}\sum_{\omega\in\Omega} Q(\omega)\big(\eta B_1 + \xi S_1(\omega) + \psi U_1(\omega)\big)
\end{aligned}
$$

Saadaan

$$
\begin{aligned}
&1 = 9/8\eta + 1\xi + 0\psi \\
&1 = 9/8\eta + 3/2\xi + 1/2\psi \\
&0 = 9/8\eta + 1/2\xi + 1\psi, \Longleftrightarrow \eta = 8/27, \quad \xi = 2/3, \quad \eta = -2/3
\end{aligned}
$$

voidaan tarkistaa että salkun alkuarvo vastaa option hintaa:

$$
V_0 = 8/27B_0 + 2/3S_0 - 2/3U_0 = (8/27) + (2/3)(8/9) - (2/3)(4/9) = \frac{16}{27} = c(F)
$$

Huomataan myös että kun numerääri B_t ei ollut käytössä, malli ei ole täydellinen, ja mahdollisesti option F arbitraasivapaiden hintojen joukko ei ole yksikäsitteinen. Siis $c(F)$ on arbitraasi vapaa hinta jos ja vain jos

$$
\begin{aligned}
&c_\alpha(F) = S_0 E_{Q(\alpha)}\left(\frac{F}{S_1}\right) = S_0 E_{Q(\alpha)}\left(\left(1-\frac{U_1}{S_1}\right)^+\right) = \\
&8/9\sum_{i=1}^{3}\left(1-\frac{U_1(\omega_i)}{S_1(\omega_i)}\right)^+ q_i(\alpha) = \\
&8/9\Big(1\; q_1(\alpha) + 2/3\; q_2(\alpha) + 0 q_3(\alpha)\Big) = 2/3 - \alpha 2/15, \qquad \alpha \in (0,1)
\end{aligned}
$$

jossa Q_α on riski neutraali numeräärin S_t:n suhteen. Arbitraasivapaiden hintojen joukko optiolle F markkinamallissa $(S, U : c(S) = 8/9, c(U) = 4/9)$ on avoin väli

$$
(c^-(F), c^+(F)) = (8/15, 2/3) = (0.5333, 0.6667)
$$

Huomataan että tämä väli sisältää option yksikäsitteisen arbitraasivapaan hinnan $c(F) = 16/27 = 0.5926$ täydellisessa mallissa (B_t, S_t, U_t).

7. Laske arbitraasi-vapaiden hintojen joukko hetkellä $t = 0$ vektorille (S, U, F, G) jossa $G = (U_1 - S_1)^+$ on toinen swap optio.

   Vihje $(S_1 - U_1) = (S_1 - U_1)^+ - (U_1 - S_1)^+$.

   R. Jos emme kiinnitä instrumentien S_0 ja U_0:n alkuhintoja, kaikki hintasysteemit

$$
(S_0, U_0, c(F), c(G)) = E_Q\Big((S_1, U_0, F, G)\Big)
$$

jossa $Q \sim P$ ovat johdonmukaisia eli arbitraasi vapaita

Kun riskitön instrumentti B_t on käytössä joudutaan diskonttamaan, siis kaikki hintasysteemit

$$
(S_0, U_0, c(F), c(G)) = \frac{B_0}{B_1} E_Q\Big((S_1, U_0, F, G)\Big)
$$

jossa $Q \sim P$ ovat arbitraasi vapaita.

Seuraavaksi kunnitetään kuten ennen osakkeiden abitraasivapaat alkuhinnat $S_0 = c(S) = 8/9, B_0 = c(B) = 4/9$. Lasketaan nyt arbitraasivapaiden hintojen joukko hetkellä $t = 0$ optioparille (F, G) markinamallissa $(S_1, U_1; S_0, U_0)$ jossa riskitön instrumentti B_t ei ole käytössä.

Vihjeestä seuraa osto myynti pariteetti

$$
\begin{aligned}
&S_0 E_{Q(\alpha)}\left(\frac{S_1 - U_1}{S_1}\right) = S_0 E_{Q(\alpha)}\left(\frac{(S_1 - U_1)^+}{S_1}\right) - S_0 E_{Q(\alpha)}\left(\frac{(U_1 - S_1)^+}{S_1}\right)\\
&= S_0 - U_0 = c_\alpha((S_1 - U_1)^+) - c_\alpha((U_1 - S_1)^+)\\
&\iff c_\alpha((U_1 - S_1)^+) = c_\alpha((S_1 - U_1)^+) + (U_0 - S_0)
\end{aligned}
$$

jossa $(U_0 - S_0) = -4/9$.