HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan, Ratkaisut, Harjoitus -1 (26.01.2012)

Merkintä: $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

1. Osoita:

$$\det(M)\det\begin{pmatrix}(1-p_1) & -p_2 & \dots & -p_n \\ -p_1 & (1-p_2) & \dots & -p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_1 & -p_2 & \dots & (1-p_n)\end{pmatrix} = 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_n$$

Vihje: induktiolla tai lineaarialgebran Sylvesterin lemman avulla:

Kun A ja B ovat $n \times m$ ja vastaavasti $m \times n$-matriiseja,

$$\det(Id_n + AB) = \det(Id_m + BA)$$

R. Olkoon $p = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{1} = (1, \ \dots, 1)$

$$\det(M) = \det(Id_n - p^\top \mathbf{1}) = \det(1 - \mathbf{1}p^\top) = 1 - (p_1 + \dots + p_n)$$

2. Olkoon V vektoriavaruus, esimerkiksi $V = \mathbb{R}^d$. Määritelmän mukaan $\mathcal{C} \subseteq V$ on konveksi jos ja vain jos

$$x, y \in \mathcal{C}, \ 0 \le \alpha \le 1 \Longrightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \in \mathcal{C}$$

Osoita että kun $n \in \mathbb{N}$,

$$x_i \in \mathcal{C}, \ \alpha_i \ge 0, i = 1, \dots, n \text{ ja } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in \mathcal{C}$$

R. Induktiolla: määritelmän mukaan väite pätee kun $n = 2$, olkoon tosi myös $(n-1)$ induktiotasolla. Olkoon

$$\beta_{n-1} = (\alpha_{n-1} + \alpha_n) \in [0,1] \quad y_{n-1} = \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} x_{n-1} + \frac{\alpha_n}{\beta_{n-1}} x_n\right) \in \mathcal{C}$$

Koska

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-2} + \beta_{n-1} \ = 1$$

seuraa

$$\big(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-2} x_2 + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \alpha_n x_n\big) =$$
$$\left(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-2} x_2 + \beta_{n-1} y_n\right) \in \mathcal{C}$$

3. *Farkaksen lemma*

   Olkoon A $(d \times n)$ matriisi, ja $b = (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^d$.

   Jompikumpi vaihtoehto on aina tosi:

   (a) On olemassa $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n_+$ jolla $j = 1, \ldots, n$ jolla $Ax = b$

   (b) On olemassa $y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ jolla $yA \in \mathbb{R}^n_+$ ja $b \cdot y < 0$.

   Todista Farkaksen lemman erottavan hypertason lauseen avulla.

   Vihje Geomeettrinen tulkinta: olkoon $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^d$ A-matriisin sarake-vektorit. Osoita että

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i : \ \alpha_i \in \mathbb{R}_+ \right\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

   joka on vektoreiden $a_1, \ldots, a_n$ virittämä kaartio on konveksi ja suljettu $\mathbb{R}^d$:ssa.

   (a) ja (b), vastaavat vaihtoehtoja $b \in \mathcal{C}$ tai $b \notin \mathcal{C}$.

   R. Kaartio $\mathcal{C}$ on konveksi:

   jos $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$ ja $y = \sum_{i=1}^n \beta_i a_i$ jossa $\alpha_i, \beta_i > 0$, kun $p \in [0,1]$ $\alpha_i p + \beta_i(1-p) \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ ja seuraa

$$px + (1-p)y = \sum_{i=1}^n \big(\alpha_i p + \beta_i(1-p)\big) a_i \in \mathcal{C}$$

   Kaartio $\mathcal{C}$ on myös suljettu, koska selvästi $\partial\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$. Huomataan myös että $0 \in \mathcal{C}$.

   Koska $\mathcal{C}$ on konveksi ja suljettu, kun $b \notin \mathcal{C}$ erottavan hyperatason lauseen nojalla on olemassa $y \in \mathbb{R}^d$ jolla

$$\begin{aligned}
&y \cdot \xi > 0 \quad \forall \xi \in (\mathcal{C} - b) \iff \\
&y \cdot (\xi - b) > 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{C} \iff \\
&y \cdot \xi > \eta \cdot b \quad \forall \xi \in \mathcal{C} \iff \\
&y \cdot a_i \alpha > y \cdot b \quad \forall \alpha \geq 0, i = 1, \ldots, n \iff \\
&y \cdot a_i \geq 0 > y \cdot b, \quad i = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

4. Olkoon $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, jossa jokainen tapahtuma $\{\ \omega_i\}$ on mahdollinen, eli $P(\{\ \omega_i\}) > 0$ $\forall i$ referenssi todennäköisyysmitan suhteen.

Tarkastellaan markkinamalli jossa on kaksi ajanhetkeä $t = 0, 1$, ja kaksi sijoitusintstrumenttia

$$S_t(\omega), U_t(\omega) \in \mathbb{R}_+$$

Olkoon

$$\begin{aligned} &S_1(\omega_1) = 1 \text{ €}\,, S_1(\omega_2) = 3/2 \text{ €}\,, S_1(\omega_3) = 1/2 \text{ €} \\ &U_1(\omega_1) = 0 \text{ €}\,, U_1(\omega_2) = 1/2 \text{ €}\,, U_1(\omega_3) = 1 \text{ €} \end{aligned}$$

- Laske instrumenteille arbitraasi vapaiden hintojen joukko, eli kaikki mahdollisia hintapareja $(c(S), c(U))$ joilla kaupan vastapuolelle ei synny arbitraasi mahdollisuuksia.
- Laske instrumenteille arbitraasi vapaiden hintojen joukko $(c(S), c(U)) \in \mathbb{R}_+^2$ silloin kun $\{\ \omega_3\}$ on mahdoton tapahtuma, eli $P(\omega_3) = 0$,

Vihje Erottavan hypertason lauseen avulla, osoitettiin luennolla että arbitraasi ei synny jos ja vain jos on olemassa todennäköisyysvektori $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}_+^3$, jolla

$$\begin{aligned} &q_1 S_1(\omega_1) + q_2 S_1(\omega_2) + q_3 S_1(\omega_3) = c(S) \\ &q_1 U_1(\omega_1) + q_2 U_1(\omega_2) + q_3 U_1(\omega_3) = c(U) \\ &q_1 + q_2 + q_3 = 1 \end{aligned}$$

Huomautus Tässä tehtävässä numeräärimme on euro €. Eli meidän käytössä on kolmas instrumentti $B_t(\omega) \equiv 1€\ \forall t \in \{0, 1\}, t \in 0, 1$.

R. Silloin kun kaikki tapahtumat $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ovat mahdollisia, eli $P(\omega_i) > 0\ i = 1, 2, 3$ referenssitodennäköisyyden suhteen, hintasysteemi $(c(S), c(U))$ on johdonmukainen jos ja vain jos on olemassa hinnoittelutodennäköisyys $Q \sim P$ (joka tarkoittaa $q_i := Q(\omega_i) > 0\ \forall i = 1, 2, 3$) jolla

$$\begin{aligned} c(S) = E_Q(S) = q_1 + 3/2 q_2 + (1 - q_1 - q_2)1/2 = 1/2 + q_1 1/2 + q_2 \\ c(U) = E_Q(U) = q_2 1/2 + (1 - q_1 - q_2) = 1 - q_1 - q_2 1/2 \end{aligned}$$

rajoituksilla $q_1, q_2 > 0$, $q_1 + q_2 < 1$.

Hinta pari $(c(S), c(U))$ on johtdonmukainen jos ja vain jos

$$\begin{aligned} (c(S), c(U)) \quad &= \quad (1/2 + q_1 1/2 + q_2, 1 - q_1 - q_2 1/2) : \quad q_1, q_2 > 0, q_1 + q_2 < 1 \\ \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} C(S) \\ C(U) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} : \quad q_1, q_2 > 0, q_1 + q_2 < 1 \end{aligned}$$

Huomataan että todennäköisyyksien joukko $\mathcal{P} = \{(q_1, q_2) : \ q_1, q_2 > 0,\ q_1 + q_2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ on avoin ja konveksi,

se on kolmio kulmapisteillä $\xi = (1,0), \eta = (0,1), \zeta = (0,0)$. Kuvaus

$$(q_1, q_2) \mapsto L(q_1, q_2) := (c(S), c(U)) = (E_Q(S_1), E_Q(U_1))$$

on lineaarinen, ja johdonmukaisten hinta vektoreiden joukko on avoin kolmio kulmapisteillä

$$L(\xi) = (1,0),\ L(\eta) = (3/2, 1/2),\ L(\zeta) = (1/2, 1)$$

Kun tapahtuma $\{\omega_3\}$ on mahdoton, eli $P(\omega_3) = 0$ referenssitodennäköisyyden suhteen, ja koska $Q \sim P$ (todennäkösyyksillä on samat nolla-joukot) myös $q_3 = Q(\omega_3) = 0$ myös hinnoittelutodennäköisyyden suhteen.

Silloin johdonmukaisten hintavektoreiden joukko

$$(E_Q(S_1), E_Q(U_1) : Q \sim P)$$

on avoin segmentti

$$\big\{L(\xi)q + (1-q)L(\eta) : \quad q \in (0,1)\big\} \ = \big\{(3/2 - q/2\ ,\ 1/2 - q/2) \ : q \in (0,1)\big\} \subseteq \mathbb{R}^2$$