HY Johdatus Matemattiseen rahoitusteoriaan, Harjoitukset 12, Ratkaisut (03.05.2012)

Huomautus: tämä tehtävä ei ole tyypillinen koetehtävä, koetehtävät tulevat olemaan paljon yksinkertäisempiä .

Olkoon jatkuva aika markkinamalli jossa on instrumentteja $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}$

$$dX_t = X_t(\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^{(1)}), \quad X_0 = 1$$
$$dY_t = Y_t(\mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^{(2)}), \quad X_1 = 1$$

jossa $W_t^{(1)}$ ja $W_t^{(2)}$ ovat molemmat Brownin liikkeita, referenssi mitan P:n suhteen, muita instrumentteja ei ole vielä käytössä.

Brownin liikkeiden kvadrattinen kovariaatio on

$$[W^{(1)}, W^{(1)}]_t = [W^{(2)}, W^{(2)}]_t = t,$$

ja ristivariaatio

$$[W^{(1)}, W^{(2)}]_t = ct \text{ , jossa } c \in [-1, 1].$$

Siis $W^{(1)}, W^{(2)}$ ovat riippumattomia kun $c = 0$, muuten ovat korreloituneita, ja täysin korreloituneita kun $c = \pm 1$.

1. Millä c arvoilla malli on arbitraasi vapaa ?

   Vihje: valitse yhden prosessin numerääriksi esimerkiski Y_t, ja etsi riskineutraalimitta $Q \sim P$ jolla $\widetilde{X}_t = (X_t/Y_t)$ on martingaali.

   R. Iton kaavalla

$$d\big(Y_t^{-1}\big) = -Y_t^{-2}dY_t + \frac{1}{2}2Y_t^{-3}d[Y]_t = Y_t^{-2}Y_t(-\mu_2 dt - \sigma_2 dW_t^{(2)} + Y_t^{-3}Y_t^2\sigma_2^2 dt\big)$$
$$= Y_t^{-1}\big(\{\ \sigma_2^2 - \mu_2\}dt - \sigma_2 dW_t^{(2)}\big)$$
$$= -Y_t^{-2}dY_t + \sigma_2^2 Y_t^{-1}dt$$

   ja osittaisintegroinnilla

$$d\widetilde{X}_t = d\bigg(X_t Y_t^{-1}\bigg) = X_t d\big(Y_t^{-1}\big) + Y_t^{-1}dX_t + d\big[X, Y^{-1}\big]_t$$
$$= X_t Y_t^{-1}\big(\{\ \sigma_2^2 - \mu_2\}dt - \sigma_2 dW_t^{(2)}\big) + Y_t^{-1}X_t\big(\mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^{(1)}\big) - XY^{-1}\sigma_1\sigma_2 c dt$$
$$= X_t Y_t^{-1}\big(\{\ \sigma_2(\sigma_2 - \sigma_1 c) + \mu_1 - \mu_2\}dt + \sigma_1 dW_t^{(1)} - \sigma_2 dW_t^{(2)}\big)$$
$$= \frac{X_t}{Y_t}\left(\frac{dX_t}{X_t} - \frac{dY_t}{Y_t} + \sigma_2(\sigma_2 - \sigma_1 c)dt\right)$$
$$= \frac{1}{Y_t}dX_t - \frac{X_t}{Y_t^2}dY_t + \frac{X_t}{Y_t}\sigma_2(\sigma_2 - \sigma_1 c)dt$$

Olkoon $Q = Q^{\lambda_1,\lambda_2} \sim P$ ekvivalentti todennäköisyysmitta jolla

$$\hat{W}_t^{(1)} = (W_t^{(1)} - \lambda_1 t), \quad \hat{W}_t^{(2)} = (W_t^{(1)} - \lambda_2 t),$$

ovat Q^{λ_1,λ_2}-martingaaleja. Siis Q^{λ_1,λ_2} todennäköisyysmitan suhteen , $W_t^{(i)}$:lla on drifti $\lambda_i t$. Uskottavuusosamäärä on

$$Z_T^{\lambda_1,\lambda_2} = \frac{dQ^{\lambda_1,\lambda_2}}{dP}_T = \exp\left(\lambda_1 W_t^1 + \lambda_2 W_t^{(2)} - \frac{1}{2}\langle \lambda_1 W^1 + \lambda_2 W^{(2)}, \lambda_1 W^1 + \lambda_2 W^{(2)} \rangle_t \right)$$
$$= \exp\left(\lambda_1 W_t^1 + \lambda_2 W_t^{(2)} - \frac{t}{2}\big(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2 c\big) \right)$$

koska $\hat{W}_t^{(i)}$ on Q^{λ_1,λ_2} martingaali jos ja vain jos tulo prosessi $\big(\hat{W}_t^{(i)} Z_t^{\lambda_1,\lambda_2}\big)$ on P-martingaali, ja kun käytetään osittaisintegrointivaavaa, ristivariaatio termi tappaa driftin termiä.

Nyt valitaan λ_1, λ_2 arvot jolla $\widetilde{X}_t$ on Q^{λ_1,λ_2} martingaali, eli

$$d\widetilde{X}_t = \widetilde{X}_t\big(\sigma_1 d\hat{W}_t^{(1)} - \sigma_2 d\hat{W}_t^{(2)}\big)$$
$$\iff \sigma_1\lambda_1 - \sigma_2\lambda_2 = \mu_2 - \mu_1 + \sigma_2(\sigma_1 c - \sigma_2)$$

joka on lineaarinen yhtälö tuntemattomilla λ_1, λ_2. Kun $\sigma_2 \neq 0$,saadaan ratkaisu

$$\lambda_2^* = \sigma_2 - \sigma_1 c + \frac{\lambda_1\sigma_1 + \mu_1 - \mu_2}{\sigma_2}$$

jossa λ_1 on vapaa parametri, eli on useita ratkaisuja kun $\sigma_1 \neq 0$. Jos $\sigma_2 = 0$ ja $\sigma_1 \neq 0$, eli Y_t on riskitön pankkitili sijoitus saadaan

$$\lambda_1^* = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_1}$$

ja ratkaisu on yksikäsitteinen. Jos $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ei ole ratkaisuja, ekvivalentti riskineutraali mitta ei ole olemassa paitsi silloin kun $\mu_2 = \mu_1$, silloin P on riskineutraali.

2. Laske ekvivalenttien martingaali-mittojen joukon (c arvon riippuen) myös kun valitaan X_t numerääriksi.

   R. Olkoon

$$\widetilde{Y}_t = Y_t X_t^{-1}$$

vaihtaamalla X_t ja Y_t rooleja edellisessä tehtävästä saadaan:

$$d\widetilde{Y}_t = \widetilde{Y}_t = \big(\{\ \sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2 c) + \mu_2 - \mu_1\}dt + \sigma_2 dW_t^{(2)} - \sigma_1 dW_t^{(1)}\big)\ ,$$

ja $\widetilde{Y}_t$ on Q^{λ_1,λ_2} martingaali jos ja vain jos

$$-\sigma_1\lambda_1 + \sigma_2\lambda_2 = -\mu_2 + \mu_1 + \sigma_1(\sigma_2 c - \sigma_2)$$

joka on lineaarinen yhtälö tuntemattomilla λ_1, λ_2. Kun $\sigma_2 \neq 0$,saadaan ratkaisu

$$\lambda_1^* = \frac{\sigma_2\lambda_2 + \mu_2 - \mu_1}{\sigma_1} + \sigma_1 - \sigma_2 c$$

ja kun $\sigma_2 \neq 0$ on useita ratkaisuja jossa λ_2 on vapaa parametri. Edelleen Jos $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ei ole ratkaisuja, ekvivalentti riskineutraali mitta ei ole olemassa paitsi silloin kun $\mu_2 = \mu_1$, silloin P on riskineutraali.

3. Millä parametrien arvoilla martingaali mitta on yksikäsitteinen ?

   R. Riski neutraali mitta on yksikäsitteinen jos ja vain jos jompikumpi $\sigma_1 = 0$ vai $\sigma_2 = 0$, mutta ei molempia.

4. Laske arbitraasi vapaiden hintojen joukko swap optiolle

$$F(\omega) = \big(X_T(\omega) - Y_T(\omega)\big)^+$$

Vihje Siis arbitraasi vapaiden hintojen joukko koostuu hinnoista

$$c(F) = Y_0 E_Q\left(\frac{F}{Y_T}\right).$$

jossa Q on jokin riskineutraali numeräärin valinnalla Y_T.

R. Option hinnoitelukaavasta

$$c(F) = Y_0 E_Q\left(\frac{(X_T - Y_T)^+}{Y_T}\right) = Y_0 E_Q\Big((\widetilde{X}_T - 1)^+\Big)$$
$$= Y_0 E_Q\left(\left\{\widetilde{X}_0 \exp\left(\sigma_1 \widehat{W}_T^{(1)} - \sigma_2 \widehat{W}_T^{(2)} - \frac{1}{2}\big(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 c\big)T\right) - 1\right\}^+\right)$$

Huomataan että hinta on yksikäsitteinen eikä riipu riskineutraalimitasta Q!.

Koska $(\sigma_1 W_t^{(1)} - \sigma_2 \widehat{W}_t^{(2)})$ on gaussinen odotusarvolla 0 ja varianssilla $v^2 t$ jossa

$$\begin{aligned} v &:= \sqrt{\,(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 c)}, \\ c(F) &= E_Q\biggl(\biggl\{X_0 \exp\Bigl(v\sqrt{T}G - \frac{1}{2}v^2 T\Bigr) - Y_0\biggr\}^+\biggr) \end{aligned}$$

jossa $G \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned} c(F) &= c_0(F) = \frac{X_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \bigl\{\exp(v\sqrt{T}\xi - \frac{1}{2}v^2 T) - \frac{Y_0}{X_0}\bigr\}^+ \exp\Bigl(-\frac{\xi^2}{2}\Bigr) d\xi \\ &= \frac{X_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{v\sqrt{T}}{2} + \frac{1}{v\sqrt{T}}\log(Y_0/X_0)}^{\infty} \Bigl\{\exp\Bigl(v\sqrt{T}\xi - \frac{1}{2}v^2 T\Bigr) - \frac{Y_0}{X_0}\Bigr\} \exp\Bigl(-\frac{\xi^2}{2}\Bigr) d\xi \\ &= \frac{X_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{v\sqrt{T}}{2} + \frac{1}{v\sqrt{T}}\log(Y_0/X_0)}^{\infty} \exp\Bigl(v\sqrt{T}\xi - \frac{1}{2}v^2 T - \frac{\xi^2}{2}\Bigr) d\xi \\ &- \frac{Y_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{v\sqrt{T}}{2} + \frac{1}{v\sqrt{T}}\log(Y_0/X_0)}^{\infty} \exp\Bigl(-\frac{\xi^2}{2}\Bigr) d\xi \\ &= \frac{X_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{v\sqrt{T}}{2} + \frac{1}{v\sqrt{T}}\log(Y_0/X_0)}^{\infty} \exp\Bigl(-\frac{\bigl(\xi - v\sqrt{T}\bigr)^2}{2}\Bigr) d\xi \\ &- \frac{Y_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{v\sqrt{T}}{2} + \frac{1}{v\sqrt{T}}\log(Y_0/X_0)}^{\infty} \exp\Bigl(-\frac{\xi^2}{2}\Bigr) d\xi \\ &= \frac{X_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{v\sqrt{T}}{2} + \frac{1}{v\sqrt{T}}\log(Y_0/X_0) - v\sqrt{T}}^{\infty} \exp\Bigl(-\frac{\xi^2}{2}\Bigr) d\xi \\ &- \frac{Y_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{v\sqrt{T}}{2} + \frac{1}{v}\log(Y_0/X_0)}^{\infty} \exp\Bigl(-\frac{\xi^2}{2}\Bigr) d\xi \end{aligned}$$

merkinnällä $\Phi(x) = P(G \le x) = 1 - \Phi(-x)$ (standardi-gaussisen jakauman kertymäfunktio)

$$\begin{aligned} &= X_0\biggl(1 - \Phi\Bigl(\frac{\log(Y_0/X_0)}{v\sqrt{T}} - \frac{v\sqrt{T}}{2}\Bigr)\biggr) - Y_0\biggl(1 - \Phi\Bigl(\frac{\log(Y_0/X_0)}{v\sqrt{T}} + \frac{v\sqrt{T}}{2}\Bigr)\biggr) \\ &= X_0 \Phi\Bigl(\frac{\log(X_0/Y_0)}{v\sqrt{T}} + \frac{v\sqrt{T}}{2}\Bigr) - Y_0 \Phi\Bigl(\frac{\log(X_0/Y_0)}{v\sqrt{T}} - \frac{v\sqrt{T}}{2}\Bigr) \end{aligned}$$

5. Silloin kun riskineutraali mitta on yksikäsitteinen laske option $F(\omega)$:n suojausstrategian.

   Vihje: laske ensin option arvoa hetkellä $0 < t < T$,

$$c_t(F) = Y_t E_Q \left(\frac{F}{Y_T} \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

   R. Koska option hinta ei riipu riskineutraalimitasta swap-optio F on suojattavissa joka tapauksessa.

$$c_t(F) = Y_t E_Q \left(\frac{F}{Y_T} \middle| \mathcal{F}_t \right) =$$

$$E_Q\left(\left\{ x \exp\left(\sigma_1 \widehat{W}^{(1)}_{T-t} - \sigma_2 \widehat{W}^{(2)}_{T-t} - \frac{1}{2}\big(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 c\big)(T-t) \right) - y \right\}^+ \right)\Bigg|_{x=X_t(\omega),\, y=Y_t(\omega)}$$

$$E_Q\left(\left\{ x \exp\left(v\sqrt{T-t}G - \frac{1}{2}v^2 T - t \right) - y \right\}^+ \right)\Bigg|_{x=X_t(\omega),\, y=Y_t(\omega)}$$

$$= X_t \Phi\left(\frac{\log(X_t/Y_t)}{v\sqrt{T-t}} + \frac{v\sqrt{T-t}}{2} \right) - Y_t \Phi\left(\frac{\log(X_t/Y_t)}{v\sqrt{T-t}} - \frac{v\sqrt{T-t}}{2} \right)$$

Olkoon diskontattu option arvo

$$\widetilde{c}_t(F) := \frac{c_t(F)}{Y_t} = \widetilde{X}_t \Phi\left(\frac{\log(\widetilde{X}_t)}{v\sqrt{T-t}} + \frac{v\sqrt{T-t}}{2} \right) - \Phi\left(\frac{\log(\widetilde{X}_t)}{v\sqrt{T-t}} - \frac{v\sqrt{T-t}}{2} \right) = \widetilde{g}(\widetilde{X}_t, t)$$

jossa

$$\widetilde{g}(x,t) = x\Phi\left(\frac{\log(x)}{v\sqrt{T-t}} + \frac{v\sqrt{T-t}}{2} \right) - \Phi\left(\frac{\log(x)}{v\sqrt{T-t}} - \frac{v\sqrt{T-t}}{2} \right)$$

ja koska

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{g}(x,t) = \Phi\left(\frac{\log(x)}{v\sqrt{T-t}} + \frac{v\sqrt{T-t}}{2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{v\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{ \frac{\log(x)}{v\sqrt{T-t}} + \frac{v\sqrt{T-t}}{2} \right\}^2 \right)$$

$$- \frac{1}{xv\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{ \frac{\log(x)}{v\sqrt{T-t}} - \frac{v\sqrt{T-t}}{2} \right\}^2 \right)$$

Koska diskontattu option arvo on (lokaali)martingaali Q mitan suhteen, Iton kaavasta seuraa

$$\widetilde{c}_t(F) = \widetilde{g}(\widetilde{X}_t, t) = \widetilde{g}(\widetilde{X}_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{g}(\widetilde{X}_t, t) d\widetilde{X}_t$$

koska $\widetilde{c}_t(F)$ on martingaali ja sen rajoitetusti heilahteleva osa on nolla. Olkoon

$$\gamma_t = \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{g}(\widetilde{X}_t, t),$$

Olkoon $\widetilde{V}_t = \widetilde{c}_t(F)$ (option toistavan salkun diskontattu arvo), $V_t = c_t(F)$ (salkun arvo) Osittaisintegroinnilla,

$$\begin{aligned}
&dV_t = d\big(Y_t\widetilde{V}_t\big) = d\big(Y_t\widetilde{g}(\widetilde{X}_t, t)\big) = \\
&Y_t\gamma_t d\widetilde{X}_t + \widetilde{V}_t dY_t + d\langle Y, \widetilde{V}\rangle_t = \\
&Y_t\gamma_t\left\{\frac{1}{Y_t}dX_t - \frac{X_t}{Y_t^2}dY_t + \frac{X_t}{Y_t}\sigma_2(\sigma_2 - \sigma_1 c)dt\right\} + \widetilde{V}_t dY_t + \gamma_t d\langle Y, \widetilde{X}\rangle_t
\end{aligned}$$

jossa

$$\begin{aligned}
&d\langle Y, \widetilde{X}\rangle_t = \frac{1}{Y_t}d\langle Y, X\rangle_t - \frac{X_t}{Y_t^2}d\langle Y, Y\rangle_t \\
&= \frac{1}{Y_t}X_t Y_t\sigma_1\sigma_2 d\langle W^{(1)}, W^{(2)}\rangle_t - \frac{X_t}{Y_t^2}Y_t^2\sigma_2^2 d\langle W^{(2)}, W^{(2)}\rangle_t = X_t\sigma_2(\sigma_1 c - \sigma_2)dt
\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}
&dV_t = \gamma_t dX_t + \frac{V_t - \gamma_t X_t}{Y_t}dY_t + X_t\gamma_t X_t\Big\{\sigma_2(\sigma_2 - \sigma_1 c) + \sigma_2(\sigma_1 c - \sigma_2)\Big\}dt \\
&= \gamma_t dX_t + \frac{V_t - \gamma_t X_t}{Y_t}dY_t
\end{aligned}$$

Eli option itserahoittava suojaus strategia on

$$\begin{aligned}
&V_T(\omega) = \big(X_T(\omega) - Y_T(\omega)\big)^+ = \\
&c_0(F) + \int_0^T \gamma_s dX_s + \int_0^t \frac{V_s - \gamma_s X_s}{Y_s}dY_s
\end{aligned}$$

6. Lisätään markkinamalliin riskitön instrumentin B_t, jolla $B_0 = 1$ ja

$$dB_t = B_t r dt, \quad B_t = B_0\exp(rt)$$

Vastaa edellisiin kysymyksiin laajennetussamarkkinamallissa.

R. Laajennetussa markkinamallissa riskineutraali mitta (joka riippuu numeräärin valinnasta) on yksikäsitteinen. Swap option hinta ja suojaus strategia ei muutu koska se on suojattavissa pelkästään (X_t, Y_t) instrumenteilla.

Nimittäin kun valitaan numerääriksi Y_t, diskontattu instrumentti

$$
\begin{aligned}
\widetilde{B}_t = \frac{B_t}{Y_t} &= \widetilde{B}_0 + \int_0^t B_s d\left(\frac{1}{Y_s}\right) - \int_0^t \frac{1}{Y_s} B_s r ds \\
&= \widetilde{B}_0 - \int_0^t \frac{B_s}{Y_s^2} dY_s + \int_0^t \frac{B_s}{Y_s}(\sigma_2^2 - r) ds \\
&= \widetilde{B}_0 - \int_0^t \frac{\widetilde{B}_s}{Y_s} Y_s(\sigma_2 dW_s^{(2)} + \mu_2 ds) + \int_0^t \widetilde{B}_s(\sigma_2^2 - r) ds \\
&= \widetilde{B}_0 - \int_0^t \widetilde{B}_s \sigma_2 dW_s^{(2)} + \int_0^t \widetilde{B}_s(\sigma_2^2 + \mu_2 - r) ds \\
&= \widetilde{B}_0 - \int_0^t \widetilde{B}_s \sigma_2 d\widehat{W}_s^{(2)} + \int_0^t \widetilde{B}_s(\sigma_2^2 + \mu_2 + \sigma_2\lambda_2 - r) ds
\end{aligned}
$$

joka on (lokaali) martingaali Q^{λ_1,λ_2}: mitan suhteen jos ja vain jos

$$
\lambda_2 = \lambda_2^* = \frac{(r - \mu_2 - \sigma_2^2)}{\sigma_2}
$$

ja

$$
\lambda_1 = \lambda_1^* = \frac{r - \mu_1 + \sigma_1\sigma_2 c - 2\sigma_2^2}{\sigma_1}
$$