HY Johdatus Matemattiseen rahoitusteoriaan, Harjoitukset 11, Ratkaisut (26.04.2012)

1. Olkoon X_t, Y_t jatkuvat polut joilla on olemassa kvadrattiset kovariaatiot $[X,X]_t$, $[Y,Y]_t$ ja ristivariaatio $[X,Y]_t$.

   Osoita että

$$Z_t = \exp(X_t - \frac{1}{2}[X,X]_t)\Big(z_0 + \int_0^t \exp(-X_s + \frac{1}{2}[X,X]_s)\, d\big(Y_s - [X,Y]_s\big)\Big)$$

   on lineaarisen poluttaisen differentiaali yhtälön ratkaisu

$$dZ_t = Z_t dX_t + dY_t, \qquad \text{alkuarvolla } Z_0 = z_0 \text{ , eli } Z_t \text{ joka toteuttaa}$$
$$Z_t = z_0 + \int_0^t Z_s dX_s^- + Y_t - Y_0$$

   jossa integraali on poluttainen etuperäinen integraali.

   Vihje:

   Muistetaan että kun X_t ja Y_t ovat jatkuvia ja rajoitetusti heilähteleviä, eli $\mathrm{Var}_{[0,t]}(X) < \infty$ $\mathrm{Var}_{[0,t]}(Y) < \infty$, lineaarisen differentiaali yhtälön ratkaisu on

$$Z_t = z_0 \exp(Z_t) \qquad \text{, kun } Y_t \equiv \text{vakio. ,} \quad \text{muuten}$$
$$Z_t = \exp(X_t)\Big(z_0 + \int_0^t \exp(-X_s) dY_s \Big)$$

   (tarkista !),

   ja kun $Y_t \equiv$ vakio ja $\exists [X,X]_t > 0$, Ito Föllmerin kaavasta seuraa

$$Z_t = z_0 \exp\big(X_t - \frac{1}{2}[X,X]_t\big)$$

   Käytä osittaisintegrointikaava

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d[X,Y]_t$$

   yleisessä tapauksessa.

   R. Jos X_t ja Y_t olisivat jatkuvia ja rajoitetusti heilahteleviä,¨ esimerkiksi kun $dX_t = \dot{X}_t dt$, $dY_t = \dot{Y}_t dt$,

$$Z_t = \exp(X_t)\Big(Z_0 + \int_0^t \exp(-X_s) dY_s \Big)$$

osittaisintegroinnilla nähdään että Z_t toteuttaa differentiaali yhtälöä:

$$dZ_t = \exp(X_t)\bigg(Z_0 + \int_0^t \exp(-X_s)dY_s\bigg)dX_t + \exp(X_t)\exp(-X_t)dY_t$$
$$= Z_t dX_t + dY_t$$

Kuitenkin jos X_t:lla ja Y_t:lla on poluttaiset kvadrattiset variaatiot $[X]_t, [Y]_t$ ja ristivariaatio , osittaisintegroinnilla ja Iton kaavalla

$$\begin{aligned}dZ_t &= \bigg(Z_0 + \int_0^t \exp(-X_s)dY_s\bigg)\exp(X_t)(dX_t + \frac{1}{2}d[X]_t) \\ &+ \exp(X_t)\exp(-X_t)dY_t + d\bigg[\exp(X_\cdot), \int_0^\cdot \exp(-X_s)dY_s\bigg]_t \\ &= Z_t(dX_t + \frac{1}{2}d[X]_t) + dY_t + \exp(X_t)\exp(-X_t)d[X,Y]_t \\ &= Z_t(dX_t + \frac{1}{2}d[X]_t) + dY_t + d[X,Y]_t\end{aligned}$$

Huomataan että jos viimeisen yhtälöön sijoitetaan prosessit

$$\widetilde{X}_t = X_t - \frac{1}{2}[X]_t, \quad \widetilde{Y}_t = Y_t - [X,Y]_t$$

saadaan että

$$\begin{aligned}\widetilde{Z}_t &= \exp(\widetilde{X}_t)\bigg(Z_0 + \int_0^t \exp(-\widetilde{X}_s)d\widetilde{Y}_s\bigg) \\ &= \exp\big(X_t - \frac{1}{2}[X]_t\big)\bigg(Z_0 + \int_0^t \exp(-X_s + \frac{1}{2}[X]_s)d(Y_s - [X,Y]_s)\bigg)\end{aligned}$$

toteuttaa lineaarista stokastista differentiaali yhtälöä

$$d\widetilde{Z}_t = \widetilde{Z}_t dX_t + dY_t$$

2. Olkoon X_t jatkuva polku jolla on kvadraattinen variaatio X_t.

   Olkoon

$$X_t^* := \max_{0\le s\le t} X_s$$

   jouksev maksimi. Osoita etta kuvaus $t \mapsto X_t^*$ on jatkuva.

   R. Koska X_t on jatkuva se on tasaisesti jatkuva jokaisessa kompaktissa $[0,T]$, siis $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta$ jolla

$$\sup_{|s-t|\le\delta, s,t\in[0,T]} |X_s - X_t| \ < \varepsilon$$

Kun $0 \le s \le t \le T$,

$$X_t^* - X_s^* \le \sup_{s \le u \le t} |X_u - X_s| < \varepsilon$$

kun $(t - s) \le \delta$.

Olkoon $F(x, y) \in C^{1,2}$ eli $F_x(x, y), F_{xx}(x, y), F_y(x, y)$ ovat olemassa ja jatkuvia.

Laske moniulotteisen Ito-Föllmerin kaavalla etuperäinen poluttainen integraali

$$\int_0^t F_x(X_s, X_s^*) dX_s$$

R.

$$\int_0^t F_x(X_s, X_s^*) dX_s =$$

$$F(X_t, X_t^*) - F(X_0, X_0) - \int_0^t F_y(X_s, X_s^*) dX_s^* - \frac{1}{2} \int_0^t F_{xx}(X_s, X_s^*) d[X]_s$$

jossa

$$\int_0^t F_y(X_s, X_s^*) dX_s^*$$

on Riemann-Stieltjes integraali.

Lakse etuperäinen poluttainen integraali

$$\int_0^t X_s^* dX_s$$

R. Kun otetaan $F(x, y) = xy$, saadaan

$$\int_0^t X_s^* dX_s = X_t X_t^* - X_0^2 - \int_0^t X_s dX_s^*$$

3. Osoita gaussinen osittais-integrointi kaava: jos $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$ on standardi gaussinen, $F(G) \in C^1$

   (derivoituva jatkuvalla derivaatalla $F'(x)$)

$$E_P(F'(G)) = E_P(F(G)G)$$

Vihje: kirjoita odotusarvo integraalina gaussisen jakauman suhteen ja käytä perinteista analyysin osittaisintegrointikaava.

R. Olkoon $\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ standardi gaussinen tiheys.

Huomataan että

$$\frac{d}{dx}\,\gamma(x) = -x\gamma(x)$$

Oletamme intgroituvuuden ehtoa $F(G) \in L^2(\Omega)$.

Analyysin osittaisintegroinnin kaavalla kun

$$E_P(F'(G)) = \int_{\mathbb{R}} F'(x)\gamma(x)dx = \int_{\mathbb{R}} F'(x)\gamma(x)dx = \lim_{a\to-\infty, b\to-\infty} \int_a^b F'(x)\gamma(x)dx =$$
$$\lim_{a\to-\infty, b\to-\infty} \left\{ F(a) - F(b) - \int_a^b F(x)\gamma'(x)dx \right\}$$
$$= F(+\infty) - F(-\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} F(x)x\gamma(x)dx \Big\} = 0 + E_P(F(G)G)$$

(koska $F(x)$ on jatkuva ja $F(G) \in L^2$ seuraa $F(x) \to 0$ kun $x \to \pm\infty$).

4. Miten kirjoitetaan gaussinen osittais-integroinnin kaava satunnaismuuttujalle $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$?

   R. Voidaan kirjoittaa $\xi(\omega) = \mu + \sigma G(\omega)$ jossa $G \sim \mathcal{N}(0,1)$

   Silloin jos $\phi(x) = F(\mu + \sigma x)$, $\phi'(x) = F'(\mu + \sigma x)\sigma$, seuraa

$$E_P(\phi(G)G) = E_P(\phi'(G)) = E_P(F'(\xi))\sigma$$
$$= E_P\left(F(\xi)\frac{\xi - \mu}{\sigma} \right)$$
$$\iff E_P(F'(\xi)) = \frac{1}{\sigma^2} E_P\Big(F(\xi)(\xi - \mu) \Big)$$