HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan, Harjoitus-3 (09.02.2012)

Tarkastellan yhden perioodin (B, S) markkinamalli jossa (B_t) on riskitön pankkitilin sijoitus ja (S_t) on osakkeen arvo, $t = 0, 1$, äärellisessä todennäköisyysavaruudessa $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Referenssitodennnäköisyys on P jolla $P(\{\omega_i\}) = 1/3 > 0$ kun $i = 1, 2, 3$.

Olkoon $B_0 = S_0 = 1$, $B_1 = (1 + r)B_0$ ja $S_1(\omega) = (1 + R(\omega))S_0$, j

ossa osakkeen tuoton $R_1(\omega)$ mahdolliset arvot ovat $u = 8/5, d = 4/5, r = 6/5$ ja

$$R(\omega_1) = u, \quad R(\omega_2) = r, \quad R(\omega_3) = d$$

1. Esitä riskineutraali todennäköisyyksien juokko $Q \sim P$, numeräärin B_t:n suhteen, ja osoita että tämä (B, S)-malli on arbitraasivapaa.

   R. $Q = ($ on riski neutraali numeräärillä B_t jos ja vain jos

$$\begin{aligned}
1 = E_Q\left(\frac{1+R}{1+r}\right) &= \frac{1 + E_Q(R)}{1+r} \iff \\
p\alpha(1+u) + (1-p)\alpha(1+d) &= \alpha(1+r) \iff
\end{aligned}$$

   jossa $Q(\omega_1) = \alpha p, Q(\omega_2) = (1 - \alpha), Q(\omega_3) = \alpha(1 - p)$, rajoituksilla $\alpha, p \in (0, 1)$, josta seuraa

$$p = \frac{r-d}{u-d}, \quad \alpha \in (0,1)$$

   Malli ei ole täydellinen koska on olemassa useita riskineutraalitodennäköisyyksiä.

   Esitä riskineutraali todennäköisyyksien joukko numeräärin S_t:n suhteen.

   R. Q' on riskineutraali numeräärillä S_t jos ja vain

$$\begin{aligned}
&1 = E_{Q'}\left(\frac{1+r}{1+R}\right) = (1+r)E_{Q'}\left(\frac{1}{1+R}\right) \iff \\
&\frac{(1+r)}{1+u}p\alpha + \frac{(1+r)}{1+d}(1-p)\alpha = \alpha, \quad \alpha, p \in (0,1) \iff \\
&\iff \alpha \in (0,1), \quad p = \frac{(r-d)(1+u)}{(1+r)(u-d)}
\end{aligned}$$

   jossa $Q'(\omega_1) = \alpha p, Q(\omega_2) = (1 - \alpha), Q(\omega_3) = \alpha(1 - p)$.

Q' olisi saatu myös mitan vaihto kaavalla:

$$E_{Q'}\left(\frac{1+r}{1+R}\right) = E_Q\left(\frac{dQ'}{dQ}\frac{(1+r)}{(1+R)}\right) = 1 = E_Q(1)$$

kun

$$\frac{dQ'}{dQ}(\omega) := \frac{(1+R(\omega)}{(1+r)} \iff$$
$$Q'(\omega) = \frac{(1+R(\omega)}{(1+r)}Q(\omega)$$

eli

$$Q'(\omega_1) = \alpha\frac{(1+u)}{(1+r)}\frac{(r-d)}{(u-d)}$$
$$Q'(\omega_2) = Q(\omega_2) = (1-\alpha)$$
$$Q'(\omega_3) = \alpha\frac{(1+d)}{(1+r)}\frac{(u-r)}{(u-d)}$$

jossa $\alpha \in (0,1)$.

2. Olkoon $F(\omega) = (S_1(\omega)-1)^+$ eurooppalainen osto optio (call) lunastushinnalla $k = 1$. Laske arbitraasivapaiden hintojen joukko optiolle F. Osoita että F ei ole suojattavissa tässä (B,S)-markkinamallissa.

   Itse asiassa tämä optio on suojattavissa koska $S_1(\omega) \geq 1 \quad \forall\omega$, josta seuraa $F(\omega) = S_1(\omega) - 1$ joka on suojattavissa koska on lineaarinen funktio instrumentista S_t. Suojaus salku on (η,ξ) arvoilla $V_t = \eta B_t + \xi S_t$ jossa $\eta = -(1+r)^{-1}$, $\xi = 1$. Siis option hinta on toistavan salkun hinta

$$V_0 = \eta B_0 + \xi S_0 = -\frac{1}{1+r} + 1 = -5/11 + 1 = 6/11$$

   Sen sijaksi lasketaan eurooppalainsen osto-option $F(\omega) = (S_1(\omega) - k)^+$ hinta jossa

$$\min_\omega S_1(\omega) = (1+d) < k < \max_\omega S_1(\omega) = (1+u).$$

   Silloin arbitraasivapaiden hintojen joukko on avoin väli $(c^-(F), c^+(F))$

$$c^+(F) = \sup_{\alpha\in(0,1)} B_0 E_{Q(\alpha)}\left(\frac{(S_1-k)^+}{B_1}\right)$$
$$= \frac{1}{(1+r)}\sup_{\alpha\in(0,1)}\left\{ Q_\alpha(\omega_2)(1+r-k)^+ + Q_\alpha(\omega_1)(1+u-k)^+\right\}$$
$$= \frac{1}{1+r}\sup_{\alpha\in(0,1)}\left((1-\alpha)(1+r-k)^+ + \alpha\frac{r-d}{u-d}(1+u-k)\right)$$

jossa $\{\ Q_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$ ovat riskineutraalitodennäköisyyksiä numeräärin B_t:n suhteen,

$$= \begin{cases} \frac{(r-d)(1+u-k)}{(u-d)(1+r)} & \text{jos } r \le k-1 < u, \\ \frac{1+r-k}{1+r} + \frac{1}{(1+r)(u-d)} \sup_{\alpha\in(0,1)} \Big\{ \alpha \times \Big((r-d)(1+u-k) - (1+r-k)(u-d) \Big) \Big\} & \text{kun } d < k-1 < r \end{cases}$$

jossa $(r-d)(1+u-k) - (1+r-k)(u-d) > r(u-d) > 0$ kun $d < k-1 < r$, siis $\sup_\alpha$ saavutaan kun $\alpha = 1$ ja saadaan

$$c^+(F) = \frac{(r-d)(1+u-k)}{(u-d)(1+r)}$$

Alahinta on

$$\begin{aligned} c^-(F) &= \inf_{\alpha\in(0,1)} B_0 E_{Q(\alpha)} \left(\frac{(S_1-k)^+}{B_1} \right) \\ &= \frac{1}{(1+r)} \inf_{\alpha\in(0,1)} \left\{ \ Q_\alpha(\omega_2)(1+r-k)^+ + Q_\alpha(\omega_1)(1+u-k)^+ \right\} \\ &= \frac{1}{1+r} \inf_{\alpha\in(0,1)} \left((1-\alpha)(1+r-k)^+ + \alpha \frac{r-d}{u-d}(1+u-k) \right) \end{aligned}$$

jossa $\{\ Q_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$ ovat riskineutraalitodennäköisyyksiä numeräärin B_t:n suhteen,

$$= \begin{cases} 0 & \text{jos } r \le k-1 < u, \\ \frac{1+r-k}{1+r} & \text{kun } d < k-1 < r \end{cases} = \frac{(1+r-k)^+}{1+r}$$

Arbitraasivapaiden hintojen väli $(c^-(F), c^+(F))$ löytyy myös geomeettrisesti: olkoon

$$\begin{aligned} &A = (1+d, 0) = (S_1(\omega_3), F(\omega_3)), \quad B = (k, 1+r, (1+r-k)^+) = (S_1(\omega_2), F(\omega_2)), \\ &C = (1+u, 1+u-k) = (S_1(\omega_1), F(\omega_1)) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Olkoon $\widetilde{A} = (1+r)^{-1}A, \widetilde{B} = (1+r)^{-1}B, , \widetilde{C} = (1+r)^{-1}C$ diskontatut arvot $(\widetilde{S}_1(\omega_1), \widetilde{F}(\omega_i))$ $i = 3,2,1$. Avoin kolmio $\overset{\triangle}{\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}}$ on

Suhteellinen Sisus$\Big($Konveksipeitöstä$\Big($$(\widetilde{S}_1, \widetilde{F})$-jakauman supportista $\Big)\Big)\Big)$

Arbitraasivapaiden hintojen joukko on

$$\overset{\triangle}{\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}} \cap \{\ (1,y) : y \in \mathbb{R}\}$$

joka on avoin väli $(c^-(F), c^+(F))$.

Huomataan myös että kun otetaan $S_t(\omega) > 0$ numerääriksi,

$$\begin{aligned} c^+(F) &= \sup_{\alpha\in(0,1)} S_0 E_{Q'(\alpha)}\left(\frac{(S_1-k)^+}{S_1}\right) \\ c^-(F) &= \sup_{\inf\in(0,1)} S_0 E_{Q'(\alpha)}\left(\frac{(S_1-k)^+}{S_1}\right) \end{aligned}$$

jossa $\{\ Q'_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$ ovat riskineutraalitodennäköisyyksiä numeräärin S_t:n suhteen.

Siis arbitraasivapaiden hintojen väli ei riipu numeräärista ! (tarkista laskemalla).

3. Laske eurooppalaisen myynti-option (put) $G(\omega) = (k - S_1(\omega))^+$ arbitraasivapaiden hintoja (B, S) markkinamallissa.

   Vihje

   $$S_1(\omega) - k = (S_1(\omega) - k)^+ - (k - S_1(\omega))^+$$

   jossa $x^+ = \max\{x, 0\}$.

   R. Vihjeen perusteella

   $$G(\omega) = (k - S_1(\omega))^+ = (S_1(\omega) - k)^+ + k - S_1(\omega) = F(\omega) + k - S_1(\omega)$$

   Eli $G(\omega)$ on toistettavissa salkulla jossa on yksi F optio, $\frac{1}{1+r}$ kappaletta B_t instrumenttista, ja (-1) osaketta S_t. G option arbitraasivapaiden hintajoukko on avoin väli $(c(G)^-, c(G)^+)$, jossa

   $$\begin{aligned} c(G)^\pm &= \frac{1}{1+r}B_0 - S_0 + c(F)^\pm \\ c(G)^- &= \frac{1}{1+r} - 1 + \frac{(1+r-k)^+}{1+r} \quad , \quad c(G)^+ = \frac{1}{1+r} - 1 + \frac{(r-d)(1+u-k)}{(u-d)(1+r)} \end{aligned}$$

   jossa oletettiin k ja $(1+r) \in (1+d, 1+u)$.

4. Laske ylisuojaus-strategiat europpalaiselle osto ja myynti optiolle $F(\omega) = (S_1(\omega) - k)^+$ ja $G(\omega) = (k - S_1(\omega))^+$, (B, S)-markkinamallissa.

R. Etsitään salkku η, ξ jolla

$$F(\omega) \le V_1(\omega) = \eta B_1 + \xi(\omega) \quad \forall \omega$$

ja $V_0 = \eta B_0 + \xi S_0$ on mahdollisimmin pieni.

Tiedetään että ylisuojauksen alkupääoma on $V_0 = c^+(F)$ option ylisuojaushinta.

Koska

$$\max_{\omega} F(\omega) S_1(\omega) = F(\omega_1) S(\omega_1)$$

ratkaistaan yhtälöä

$$\eta(1+r) + \xi S_1(\omega_1) = F(\omega_1) \longleftrightarrow \eta(1+r) + \xi(1+u) = (1+u-k)^+ = (1+u-k),$$
$$\eta + \xi = c^+(F) = \frac{(r-d)(1+u-k)}{(u-d)(1+r)}$$

ja tarkistetaan että ratkaisu toteuttaa rajoituksia

$$\eta(1+r) + \xi S_1(\omega_2) \ge F(\omega_2)$$
$$\eta(1+r) + \xi S_1(\omega_3) \ge F(\omega_3)$$

Saadaan

$$\xi = \frac{(1+u-k)}{u} \frac{(u-r)}{u-d}, \quad \eta = \frac{(1+u-k)}{(u-d)(1+r)} \left(r - d - \frac{u-r}{u} \right)$$

5. Valitse arbitraasivapaa alkuhinta ((B, S)-markkinamallissa) $c(F)$ eurooppalaiselle osto-optiolle $F(\omega) = (S_1(\omega) - k)^+$, jossa $k \in (1+d, 1+u)$.

   R. Kiinnitetään option hinnaksi arbitraaisvapaahinta $c_\alpha(F) = (1-\alpha)c^{-1}(F) + \alpha c^+(F)$ jollekin $\alpha \in (0,1)$. ossa $Q(\omega_1) = \alpha p, Q(\omega_2) = (1-\alpha), Q(\omega_3) = \alpha(1-p)$,

   Laske riskineutraalitodennäköisyyksien joukko numeräärin B_t:n suhteen.

   Onko laajennettu markkinamalli $(B_1, S_1, F; B_0, S_0, c(F))$ arbitraasivapaa ?

   Onko täydellinen ?

   R. Laajennetussa markkinamallissa $(B_1, S_t, F; B_0, S_0, c_\alpha(F))$. on ainoastaan yksi riskineutraalitodennäköisyys Q_α numeräärin B_t:n suhteen jossa

$$Q_\alpha(\omega_1) = \alpha p, Q_\alpha(\omega_2) = (1-\alpha), Q_\alpha(\omega_3) = \alpha(1-p), \quad p = \frac{r-d}{u-d}, \quad \alpha \in (0,1)$$

koska $c^+(F) = c_1(F) = B_0 E_{Q_1}\big(F/B_1\big),\ c^-(F) = c_0(F) = B_0 E_{Q_0}\big(F/B_1\big)$, seuraa että

$$c_\alpha(F) = B_0 E_{Q_\alpha}\big(F/B_1\big)$$

eli Q_α on yksikäsitteinen riskineutraali numeräärin B_t:n suhteen.

Siksi rahoitusteorian päälauseista seuraa että malli on arbitraasivapaaa ja täydellinen.

6. Laske riskineutraalitodennäköisyyksien joukko numeräärin S_t:n suhteen.

   R. Samoin seuraa että Q'_α on yksikäsitteinen riskineutraali todennäköisyys numeräärillä S_t jossa

$$\begin{aligned} Q'_\alpha(\omega_1) &= \alpha\frac{(1+u)}{(1+r)}\frac{(r-d)}{(u-d)} \\ Q'_\alpha(\omega_2) &= Q_\alpha(\omega_2) = (1-\alpha) \\ Q'_\alpha(\omega_3) &= \alpha\frac{(1+d)}{(1+r)}\frac{(u-r)}{(u-d)} \end{aligned}$$

7. Laske hinta ja suojaus-strategia eurooppaisille myynti-optioille $G(\omega) = (\kappa - S_1(\omega))^+$, markkinamallissa $(B_1, S_1, F; B_0, S_0, c(F))$ lunastushinnan κ rippuen.

   R. Kun $\kappa = k$, osto-myynti pariteetista seuraa

$$c_\alpha(G) = c_\alpha(F) + \frac{k}{1+r} - S_0$$

   Jos $\kappa \neq k$, joudutaan laskemaan hinnan riskineutraalimitan kautta: numeräärillä B_t,

$$\begin{aligned} c_\alpha(G) &= B_0 E_{Q_\alpha}\left(\frac{(\kappa - S_1)^+}{1+r}\right) = \\ &\frac{(\kappa-(1+d))^+}{1+r}\alpha(1-p) + \frac{(\kappa-(1+r))^+}{1+r}(1-\alpha) + \frac{(\kappa-(1+u))^+}{1+r}\alpha p \\ &= \frac{(\kappa-(1+d))^+}{1+r}\alpha\frac{(u-r)}{(u-d)} + \frac{(\kappa-(1+r))^+}{1+r}(1-\alpha) + \frac{(\kappa-(1+u))^+}{1+r}\frac{(r-d)}{(u-d)} \end{aligned}$$