HY Johdatus Matemattiseen rahoitusteoriaan, Harjoitukset 9 (12.04.2012)

Tarkastellaan binomimalli jossa $S_0 = B_0 = 1$, $B_t = (1+r)^t B_0$, ja

$$S_t(\omega) = S_0 \prod_{s=1}^{t} (1 + R_s(\omega)), \quad \text{jossa referenssi mitan } P\text{:n suhteen}$$
$$P(R_t(\omega) = u|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) = P(R_t(\omega) = u) =$$
$$1 - P(R_t(\omega) = d|\mathcal{F}_{t-1}) = 1 - P(R_t(\omega) = u) = 1/2$$

$-1 < d < r < u$ ovat deterministisia, $t = 0, 1, \dots, T$.

Kun valitaan riskitön instrumentti B_t numerääriksi, ja merkitään osakkeen diskontattu arvoprosessi $\widetilde{S}_t(\omega) = S_t(\omega)/B_t$, riskineutraali todennäköisyyden Q:n suhteen jolla $\widetilde{S}_t$ on $\mathbb{F}$-martingaali, jossa $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$, $\mathcal{F}_t = \sigma(R_1, \dots, R_t)$.

$R_t(\omega)$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita joilla

$$Q(R_t = u|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) = 1 - P(R_t(\omega) = d|\mathcal{F}_{t-1}) = Q(R_t = u) = 1 - Q(R_t = d) = q = \frac{r-d}{u-d}$$

Olkoon $X_t = \sum_{s=1}^{t} \big(\mathbf{1}(R_s = u)2 - 1\big)$ satunnaiskulku, eli referenssi todennäköisyyden suhteen

$$P(\Delta X_t = 1) = P(R_t = u) = 1 - P(\Delta X_t = -1) = 1 - P(R_t = d) = 1/2$$

1. Laske option

$$F(\omega) = S_T(\omega)^2$$

hinta ja suojausstrategia, silloin kun maturiteetti on $T = 4$.

Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{R}_+)$ jatkuva jolla on kvadrattinen variaatio $[X]_t = [X, X]_t$, ja $t \mapsto A_t \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Osoita että A on rajoitetusti heilähtelevä eli on kahden ei-vähenevien funktioiden erotus, ja siksi $[A, A] = 0$

Olkoon $Y_t = A_t + X_t$. Muistetaan että $[Y, Y]_t = [X, X]_t$.

Muista Iton kaava:

$$\int_0^t F_x(X_s)dX_s = F(X_t) - F(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^t F_{xx}(X_s)d[X, X]_s$$

Muistetaan myös että jos $Z_t = \int_0^t F_x(X_s)dX_s$,

$$[Z, Z]_t = [F(X., F(X.)]_t = \int_0^t F_x(X_s)^2 d[X, X]_s$$

Laske poluttaiset Ito integraalit

2.

$$\int_0^t X_s^n dX_s$$

3.

$$\int_0^t \exp(\sigma X_s^n) dX_s$$

4.

$$\int_0^t \sin(\sigma X_s) dX_s,$$

5.

$$\int_0^t \cos(\sigma X_s) dX_s,$$

6.

$$\int_0^t Y_s^n dY_s$$

7.

$$\int_0^t \exp(\sigma Y_s^n) dY_s$$

8.

$$\int_0^t A_s^n dA_s$$

9.

$$\int_0^t \exp(\sigma A_s^n) dA_s$$

10.

$$\int_0^t \sin(\sigma A_s) dA_s,$$

11.

$$\int_0^t \cos(\sigma A_s) dA_s,$$

12.

$$\int_0^t Y_s^n dX_s$$

13.

$$\int_0^t \exp(\sigma Y_s^n) dX_s$$

Laske myös yllä olevien Ito-integraalien qvadrattinen variaatio.