

**HY Johdatus Matemaattiseen rahoitusteoriaan, Harjoitukset 8
(29.03.2012)**

Tarkastellaan binomimalli jossa $S_0 = B_0 = 1$, $B_t = (1+r)^t B_0$, ja

$$S_t(\omega) = S_0 \prod_{s=1}^t (1 + R_s(\omega)), \quad \text{jossa referenssi mitan } P\text{:n suhteen}$$

$$P(R_t(\omega) = u | \mathcal{F}_{t-1})(\omega) = P(R_t(\omega) = u) =$$

$$1 - P(R_t(\omega) = d | \mathcal{F}_{t-1}) = 1 - P(R_t(\omega) = u) = 1/2$$

$-1 < d < r < u$ ovat deterministisiä, $t = 0, 1, \dots, T$.

Kun valitaan riskitön instrumentti B_t numerääriksi, ja merkitään osakkeen diskontattu arvoprosessi $\tilde{S}_t(\omega) = S_t(\omega)/B_t$, riskineutraali todennäköisyyden Q :n suhteen jolla \tilde{S}_t on \mathbb{F} -martingaali, jossa $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$, $\mathcal{F}_t = \sigma(R_1, \dots, R_t)$.

$R_t(\omega)$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita joilla

$$Q(R_t = u | \mathcal{F}_{t-1})(\omega) = 1 - P(R_t(\omega) = d | \mathcal{F}_{t-1}) = Q(R_t = u) = 1 - Q(R_t = d) = q = \frac{r-d}{u-d}$$

Olkoon $X_t = \sum_{s=1}^t (\mathbf{1}(R_s = u) - 1)$ satunnaiskulku, eli referenssi todennäköisyyden suhteen

$$P(\Delta X_t = 1) = P(R_t = u) = 1 - P(\Delta X_t = -1) = 1 - P(R_t = d) = 1/2$$

ja

$$X_t^* = \max_{1 \leq s \leq t} X_s$$

satunnaiskulun joukseva maksimi.

Oletamme jatkossa että

$$(1+u) = (1+d)^{-1} \iff d = \frac{u}{1+u},$$
$$\implies q = \frac{(1+u)r - u}{u^2}$$

Silloin voidaan esittää

$$S_t = S_0(1+u)^{X_t}$$

ja siksi

$$S_t^* := \max_{1 \leq s \leq t} S_s = S_0(1+u)^{X_t^*} \quad (0.1)$$

(Huomataan että ilman oletusta $(1+d) = (1+u)^{-1}$ (0.1) ei päde !

1. Laske

$$P(X_t = k)$$

referenssi todennäköisyyden P :n suhteen

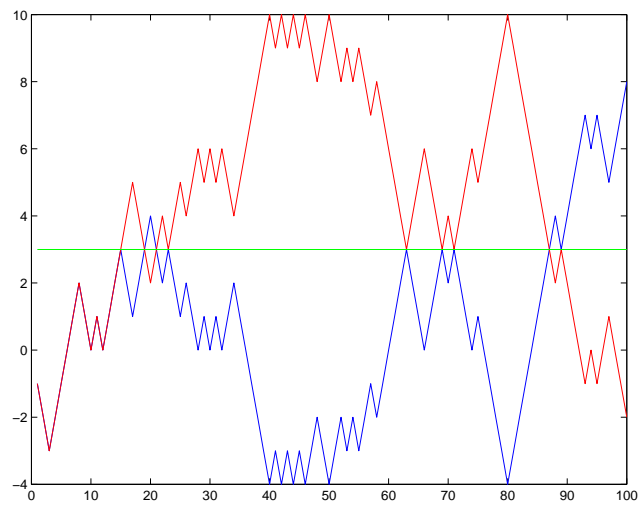
2. Osoita satunnaiskulun hejastusperiaate

$$P(X_t^* \geq k, X_t = k-l) = P(X_t = k+l)$$

$$P(X_t^* = k, X_t = k-l) = P(X_t^* \geq k, X_t = k-l) - P(X_t^* \geq (k+1), X_t = k-l)$$

referenssi todennäköisyyden P :n suhteen.

Vihje Kuvassa



esintyy polku X_t ja polku X'_t joka on hejastettu tasolle $k = 3$ seuraavalla tavalla:

$$\text{kun } \tau(\omega) = \min\{t : X_t(\omega) \geq k\}$$

$$X'_t(\omega) = X_t(\omega) \text{ jos } t < \tau(\omega),$$

$$X'_t(\omega) = X_t(\omega) - 2(X_t(\omega) - X_{\tau(\omega)}(\tau(\omega))).$$

Jokaisen X_t polun joka kulkee k tason yläpuolella ja päättyy k tason alapuolelle, vastaa yksikäsitteinen hejastettu polku X'_t joka päättyy k tason yläpuolella.

P todennäköisyys on symmetrinen, kaikki polut ovat yhtä todennäköisiä.

3. Osoita että uskottavuusosamääräprosessi riskineutraali ja referenssi todennäköisyyden välissä on

$$Z_t(\omega) = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}(\omega)}{dP|_{\mathcal{F}_t}(\omega)} = \frac{q^{Y_t} 1 - q^{t-Y_t}}{p^{Y_t} 1 - p^{t-Y_t}}$$

jossa $Y_t = \frac{t + X_t}{2} = \sum_{s=1}^t \mathbf{1}(R_s = 1)$

riskineutraali.

4. Laske polkuriippuvaisten optioiden ja suojausstrategiat (B_t, S_t) markkinamallissa

- (a) $F(\omega) = f(S_T, S_T^*) = (S_T^* - S_T)$.
 (b) $F(\omega) = f(S_T, S_T^*) = (S_T - k)^+ \mathbf{1}(S_T^* \geq c)$ jossa $0 < k < c$.
 (c) $F(\omega) = f(S_T, S_T^*) = (S_T - k)^+ \mathbf{1}(S_T^* < c)$

Vihje Käytä hinnoittelu kaava:

$$c(F) = B_0 E_Q \left(\frac{F}{B_T} \right) = B_0 E_P \left(Z_T \frac{F}{B_0} \right) = B_0 E_P \left(z_T(S_T) \frac{f(S_T, S_T^*)}{B_0} \right) =$$

jossa P on symmetrisen satunnaiskulun jakauma ja

$$Z_T = \frac{dQ_T}{dP_T} = z_T(S_T)$$

on uskottavuusosamäärä mitanvaihto kaavassa.

Suojaus strategian laskemiseen käytä kaava

$$\frac{1}{B_0} F(\omega) = E_Q(\tilde{F}) + \sum_{s=1}^T \frac{E_Q(\nabla_s \tilde{F} | \mathcal{F}_{s-1})}{E_Q(\nabla_s \tilde{S}_s | \mathcal{F}_{s-1})} \Delta \tilde{S}_s$$

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{F(\omega)}{B_T}, \quad \tilde{S}_t(\omega) = \frac{S_t(\omega)}{B_t},$$

ja esitä ehdolliset odotusarvot riskineutraalitodennäköisyyden suhteen abstrakti Bayesin kaavan avulla, jossa ehdolliset odotusarvot lasketaan referenssimitan P :n suhteen.